CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100 (wersje arkusza: A i B), EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-400, EMAP-P0-600, EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00, EMAP-P0-Z00, EMAU-P0-100
Termin egzaminu:	8 maja 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2023 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1698).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	A

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2. używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	B

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	A

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	A

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	A

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.2) […] posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	D

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	A

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] maksymalne przedziały, w których funkcja maleje […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	C

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] wartość największą […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	B

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	A

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	D

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji […] tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	B

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	C

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	C

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G10.8) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] rombach […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	D

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	B

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	B

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa […] do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
D	B

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	A

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych ([…] prostej […]) w […] symetrii środkowej względem początku układu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
A	D

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 9.1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami […]; 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
B	D

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.3) wyznacza średnią arytmetyczną […] zestawu danych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	B

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A	Wersja B
C	D

Zadanie 29. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe. 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wersja A
B

Wersja B
B

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 30. (0–2)

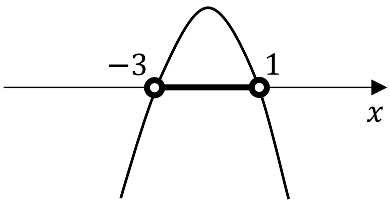
Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $(-3,1)$ lub $x \in (-3,1)$

ALBO

– spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $-x^2-2x+3$:
$x_1 = 1$ oraz $x_2 = -3$

ALBO

– odczytanie z wykresu funkcji $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ i zapisanie miejsc zerowych $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający, rozpoczynając realizację pierwszego etapu rozwiązania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $x^2 - 2x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $x^2 - 2x > 0$), to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów oraz zapisze: $x \in \langle -3, 1 \rangle$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1, -3)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy nierówność w postaci $-x^2 - 2x + 3 > 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $-x^2 - 2x + 3$.

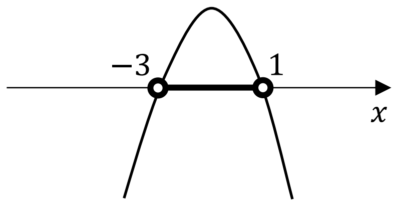
Obliczamy wyróżnik trójmianu: $\Delta = 16$

i obliczamy jego pierwiastki: $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 1$

ALBO

podajemy pierwiastki trójmianu bezpośrednio, zapisując je lub zaznaczając je na wykresie: $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 1$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-3, 1)$ lub $x \in (-3, 1)$, lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej:



Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i obliczenie pierwszej raty: 750 zł.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisanie równania z niewiadomą a_1 (pierwszą ratą):

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18 = 8910$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz zapisanie równania z niewiadomą a_1:

$\frac{2a_1+17\cdot 30}{2} \cdot 18 = 8910$ i zapisanie, że a_1 jest ostatnią ratą,

ALBO

– zapisanie równania

$$a_1 + (a_1 - 30) + (a_1 - 2 \cdot 30) + (a_1 - 3 \cdot 30) + \dots + (a_1 - 17 \cdot 30) = 8910,$$

gdzie a_1 jest pierwszą ratą, lub równania

$$a_1 + (a_1 + 30) + (a_1 + 2 \cdot 30) + (a_1 + 3 \cdot 30) + \dots + (a_1 + 17 \cdot 30) = 8910$$

(łącznie z zapisem, że a_1 jest ostatnią ratą),

ALBO

– zapisanie zależności między pierwszą (a_1) i ostatnią ratą (a_{18}), np.

$a_1 + a_{18} = 8910 : 9$ albo $a_{18} = a_1 - 17 \cdot 30$ itp.,

ALBO

– rozpatrzenie osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego o różnicy (-30) lub 30 i zapisanie co najmniej pierwszego oraz ostatniego wyrazu tego ciągu, np.

$(x, x - 30, x - 60, \dots, x - 510)$ dla dowolnego x (np. jak w sposobie V),

ALBO

– zapisanie układu równań, z którego można obliczyć jedną z rat, np.

$\frac{a_9+a_{10}}{2} = 495$ i $a_{10} = a_9 - 30$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

2. Jeżeli zdający zapisze tylko 750 zł, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający rozważa ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 30$, obliczy $a_1 = 240$ i nie interpretuje a_1 jako ostatniej raty, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający błędnie interpretuje liczbę 8910 jako wyraz ciągu rat, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $S_{18} = 8910$ i $r = -30$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot (-30)}{2} \cdot 18 = 8910$$

Przekształcając to równanie równoważnie, otrzymujemy

$$9(2a_1 - 510) = 8910$$

$$2a_1 - 510 = 990$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób II

Przyjmujemy, że kolejne (licząc od końca) raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $S_{18} = 8910$ i $r = 30$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie

$$\frac{2a_1 + 17 \cdot 30}{2} \cdot 18 = 8910$$

Przekształcając to równanie równoważnie, otrzymujemy

$$9(2a_1 + 510) = 8910$$

$$2a_1 + 510 = 990$$

$$a_1 = 240$$

Ostatnia rata była równa 240 zł.

Obliczamy wysokość pierwszej raty

$$a_{18} = 240 + 17 \cdot 30 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

Sposób III

Kolejne kwoty, o które pomniejszana jest pierwsza rata, tworzą ciąg arytmetyczny, w którym różnica jest równa 30. Wtedy osiemnasta rata jest mniejsza od pierwszej raty o kwotę $(18 - 1) \cdot 30 = 510$ zł.

Stąd

$$a_1 + (a_1 - 30) + (a_1 - 60) + (a_1 - 90) + \ldots + (a_1 - 510) = 8910$$

$$18a_1 - (30 + 60 + 90 + \ldots + 510) = 8910$$

gdzie suma siedemnastu liczb $30 + 60 + 90 + \ldots + 510$ jest równa

$$\frac{30 + 510}{2} \cdot 17 = 4590$$

Zatem

$$18a_1 - 4590 = 8910$$

$$18a_1 = 13500$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

<u>*Sposób IV*</u>
Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, zatem

$$a_1 + a_{18} = a_2 + a_{17} = a_3 + a_{16} = \ldots = a_9 + a_{10}$$

Obliczamy wartość pojedynczej sumy

$$a_1 + a_{18} = 8910 : 9 = 990$$

Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, mamy

$$a_1 + a_1 - 17 \cdot 30 = 990$$

$$2a_1 = 990 + 510$$

$$a_1 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

<u>*Sposób V*</u>
Przyjmujemy, że pierwsza rata była równa 1000 zł. Wtedy kolejne raty są równe:

970 zł, 940 zł, ... , 490 zł.

Suma wszystkich rat jest równa $13\,410$ zł i przewyższa kwotę z warunków zadania o 4500 zł.

Obliczamy, o ile należy zmniejszyć każdą ratę:

$$4500 : 18 = 250$$

$$1000 - 250 = 750$$

Pierwsza rata była równa 750 zł.

<u>Sposób VI</u>

Kolejne raty są wyrazami osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy $r = -30$. Obliczymy dowolną ratę (np. dziewiątą), korzystając z własności tego ciągu:

$$\begin{cases}(a_9 + a_{10}) \cdot 9 = 8910 \\ a_{10} = a_9 - 30\end{cases} \qquad \begin{cases}a_9 + a_{10} = 990 \\ a_9 - a_{10} = 30\end{cases}$$

$$2a_9 = 1020 \qquad a_9 = 510$$

Zatem

$$a_1 = a_9 - 8 \cdot (-30) = 510 + 240 = 750$$

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2. używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ do postaci $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że $(x-1)^2$ jest liczbą dodatnią i suma $(x-1)^2 + (y-2)^2$ jest liczbą dodatnią

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + (y^2 - 4y + 5)$ zmiennej x **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni, oraz uzasadnienie prawdziwości nierówności $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ dla $y = 2$,

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $y^2 - 4y + (x^2 - 2x + 5)$ zmiennej y **oraz** uzasadnienie, że ten wyróżnik jest ujemny dla każdego $x \neq 1$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** poprawne uzasadnienie prawdziwości nierówności $f(x) > g(y)$ dla każdego $x \neq 1$ i $y \in \mathbb{R}$ na podstawie analizy zbiorów wartości obu funkcji.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ do postaci $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + (y^2 - 4y + 5)$ zmiennej x **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(2y-4)^2$ bądź $\Delta = -4(y-2)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-4y^2 + 16y - 16$),

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $y^2 - 4y + (x^2 - 2x + 5)$ zmiennej y **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(2x-2)^2$ bądź $\Delta = -4(x-1)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-4x^2 + 8x - 4$),
ALBO
– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** zbadanie zbioru wartości jednej z funkcji: f albo g.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości x i y, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Przekształcamy nierówność $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ w sposób równoważny:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 > 0$$

Zauważamy, że lewą stronę nierówności można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq 1$, więc $(x-1)^2$ jest liczbą dodatnią. Liczba $(y-2)^2$ jest liczbą nieujemną, zatem suma $(x-1)^2 + (y-2)^2$ jest liczbą dodatnią.
To należało wykazać.

Sposób II (trójmian kwadratowy zmiennej x z parametrem y)
Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ i otrzymujemy
$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 > 0$.
Wyrażenie $x^2 - 2x + (y^2 - 4y + 5)$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej x.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (y^2 - 4y + 5)$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 + 16y - 20$$

$$\Delta = -4(y^2 - 4y + 4)$$

$$\Delta = -4(y-2)^2$$

Gdy $y \neq 2$, to $\Delta < 0$ i funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + (y^2 - 4y + 5)$ zmiennej x nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Gdy $y = 2$, to $\Delta = 0$ i funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe: $x = 1$. Ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \neq 1$.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y nierówność $x^2 - 2x + (y^2 - 4y + 5) > 0$ jest prawdziwa.
Zatem nierówność $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y. To należało wykazać.

Sposób III (poprzez analizę zbioru wartości dwóch funkcji)
Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ do postaci $f(x) > g(y)$, następnie analizujemy zbiory wartości funkcji f (określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$) oraz funkcji g (określonej dla każdej liczby rzeczywistej y). Takie przekształcenie równoważne nierówności można wykonać na różne sposoby, np. tak:

$$x^2 - 2x + 1 > -y^2 + 4y - 4 \quad \text{oraz} \quad x \neq 1 \text{ i } y \in \mathbb{R}$$

Otrzymaną postać nierówności przekształcamy do postaci

$$(x-1)^2 > -(y-2)^2 \quad \text{oraz} \quad x \neq 1 \text{ i } y \in \mathbb{R}$$

Rozważamy funkcje f i g takie, że

$$f(x) = (x-1)^2 \quad \text{dla} \quad x \neq 1 \qquad \text{oraz} \qquad g(y) = -(y-2)^2 \quad \text{dla} \quad y \in \mathbb{R}$$

Zbiorami wartości tych funkcji są przedziały: $ZW_f = (0, +\infty)$ oraz $ZW_g = (-\infty, 0]$.
Zauważmy, że każda wartość funkcji f jest większa od każdej wartości funkcji g.
To oznacza, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $f(x) > g(y)$.
Zatem nierówność $x^2 + y^2 + 5 > 2x + 4y$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y. To należało wykazać.

Zadanie 33. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa. 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
2 pkt – poprawna metoda i obliczenie pola trójkąta T_2: $P_2 = 120$.
1 pkt – wykorzystanie podobieństwa trójkątów i zapisanie układu równań/równania pozwalającego obliczyć długości przyprostokątnych trójkąta T_2, np.

$\frac{a_2}{b_2} = \frac{12}{5}$ i $a_2^2 + b_2^2 = 26^2$, $(12x)^2 + (5x)^2 = 26^2$

ALBO

– zapisanie stosunku pól trójkątów T_1 i T_2: $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{|BC|}{26}\right)^2$ (lub $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{26}{|BC|}\right)^2$) **oraz** obliczenie długości odcinka BC: $|BC| = 13$,
ALBO

– obliczenie/zapisanie skali podobieństwa trójkątów, np. $k = \frac{|EF|}{|BC|} = 2$ (lub $k = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$),
ALBO

– obliczenie/zapisanie długości przyprostokątnych trójkąta T_2 : $10, 24$,
ALBO

– obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długości a_2, b_2 przyprostokątnych trójkąta T_2, np. $c_1 = 13$ i $\frac{13}{12} = \frac{26}{a_2}$ i $\frac{13}{5} = \frac{26}{b_2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Długości przyprostokątnych trójkątów T_1 i T_2 oznaczymy odpowiednio jako: a_1, b_1 oraz a_2, b_2 . Z podobieństwa trójkątów T_1 i T_2 wynika, że stosunki odpowiednich boków są równe:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{gdzie} \quad a_1 = 12,\ \ b_1 = 5$$

Zatem

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{12}{5} \quad \text{więc} \quad b_2 = \frac{5}{12}a_2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_2 mamy:

$$a_2^2 + b_2^2 = 26^2$$

$$a_2^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 a_2^2 = 26^2$$

$$\frac{169}{144}a_2^2 = 26^2$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{144}{169}} \cdot 26 = 24$$

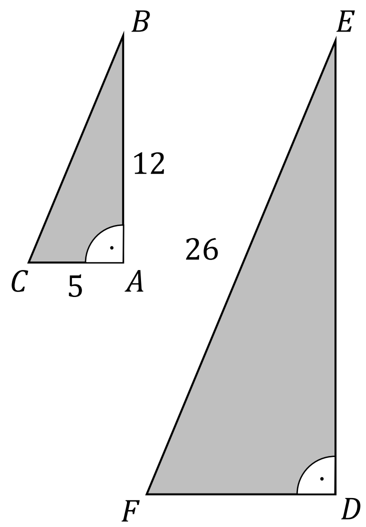
Zatem $b_2 = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10$.

Obliczamy pole trójkąta T_2:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$$

<u>*Sposób II*</u>

Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_1 przez A, B, C, gdzie BC jest przeciwprostokątną tego trójkąta, $|AB| = 12$ i $|AC| = 5$. Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_2 przez D, E, F, gdzie EF jest przeciwprostokątną tego trójkąta.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_1 mamy

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$12^2 + 5^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 169$$

$$|BC| = 13$$

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1:

$$k = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{26}{13} = 2$$

Obliczamy długości przyprostokątnych trójkąta T_2:

$$|DE| = 2 \cdot |AB| = 2 \cdot 12 = 24$$

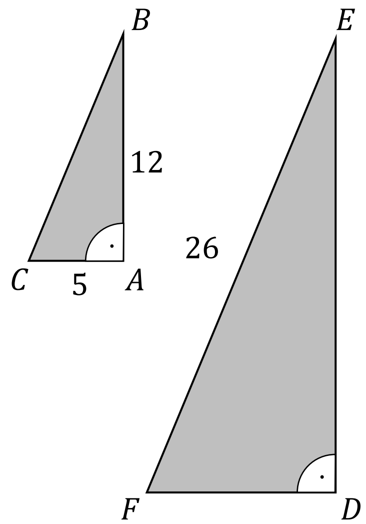
$$|DF| = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot 5 = 10$$

Obliczamy pole trójkąta T_2:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$$

<u>*Sposób III*</u>

Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_1 przez A, B, C, gdzie BC jest przeciwprostokątną tego trójkąta, $|AB| = 12$ i $|AC| = 5$. Oznaczamy wierzchołki trójkąta T_2 przez D, E, F, gdzie EF jest przeciwprostokątną tego trójkąta.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta T_1 mamy

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

$$12^2 + 5^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 169$$

$$|BC| = 13$$

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1:

$$k = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{26}{13} = 2$$

Obliczamy pole P_1 trójkąta T_1:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$$

Korzystając z tego, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, obliczamy pole P_2 trójkąta T_2:

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2$$

Zatem

$$P_2 = k^2 \cdot P_1 = 2^2 \cdot 30 = 120$$

Zadanie 34. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest […] prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zasady oceniania

2 pkt – wyznaczenie i zapisanie równania prostej zawierającej przekątną BD (w postaci równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi) np. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$.

1 pkt – obliczenie współrzędnej punktu S **oraz** obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC (lub zapisanie równania prostej AC): $S = (-4, 1)$ oraz $\frac{3}{4}$

ALBO

– wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej BD: $\left(-\frac{4}{3}\right)$,

ALBO

– zapisanie równości $|PA| = |PC|$ wynikającej z własności symetralnej (gdzie P jest punktem leżącym na symetralnej odcinka AC) lub zapisanie równania postaci $\sqrt{(x+8)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych punktów B i D (lub jednego z nich i punktu S), z wykorzystaniem punktów kratowych.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ przekątne w kwadracie dzielą się na połowy, szukamy środka odcinka AC:

$$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-8+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (-4, 1)$$

Korzystając ze wzoru $(y - y_A)(x_C - x_A) - (y_C - y_A)(x - x_A) = 0$, wyznaczamy równanie prostej AC:

$$\big(y - (-2)\big)\big(0 - (-8)\big) - \big(4 - (-2)\big)\big(x - (-8)\big) = 0$$

$$(y + 2) \cdot 8 - 6 \cdot (x + 8) = 0$$

$$8y = 6x + 32$$

$$y = \frac{3}{4}x + 4$$

Prosta zawierająca przekątną BD jest prostopadła do prostej AC, zatem jej współczynnik kierunkowy jest równy $\left(-\frac{4}{3}\right)$.

Obliczamy współczynnik b równania kierunkowego prostej BD, podstawiając do wzoru $y = -\frac{4}{3}x + b$ współrzędne punktu $S = (-4, 1)$:

$$1 = -\frac{4}{3} \cdot (-4) + b$$

$$b = -\frac{13}{3}$$

Prosta zawierająca przekątną BD kwadratu $ABCD$ ma postać $y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$.

Uwaga:

Równanie prostej, która zawiera przekątną BD kwadratu $ABCD$, można wyznaczyć z równości wynikającej z własności symetralnej odcinka AC.

Niech $P = (x, y)$ będzie punktem leżącym na symetralnej odcinka AC.

Wtedy:

$$|PA| = |PC|$$

$$\sqrt{(x+8)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x+8)^2 + (y+2)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$12y = -16x - 68 + 16$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$$

Zadanie 35. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{6}{64}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 8 \cdot 8$ lub sporządzenie tabeli o 64 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego:
$(3,5), (5,3), (6,5), (5,6), (5,9), (9,5)$,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A:
$|A| = 6$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa $\frac{1}{8}$ na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{64}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{6}{64}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 6 lub 64 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych obrazuje tabela 8×8, co oznacza, że moc zbioru Ω jest równa 64.

W tabeli zaznaczamy iloczyny podzielne przez 15.

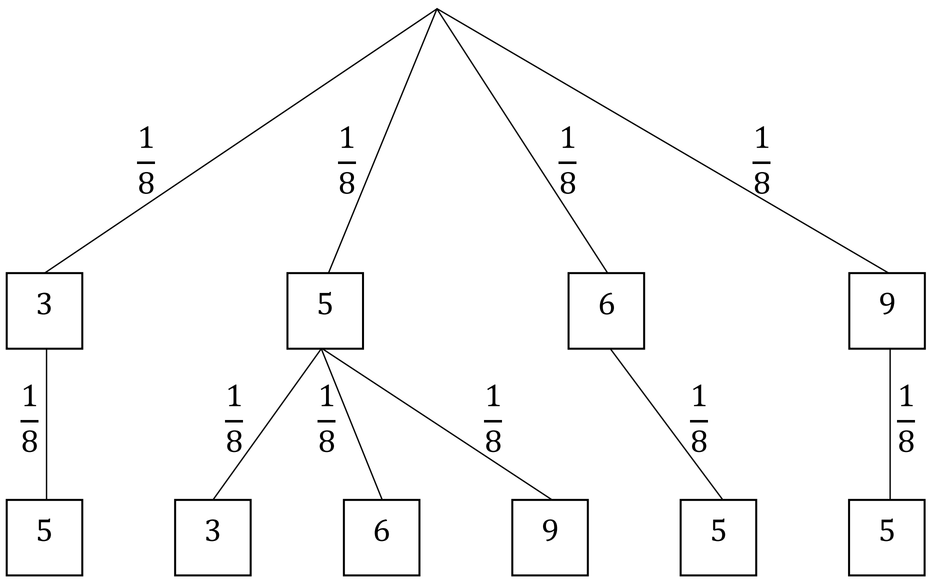
	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3				×				
4								
5		×			×			×
6				×				
7								
8								
9				×				

Zdarzeń sprzyjających wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 15, jest 6. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 15, jest równe $\frac{6}{64}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.

Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{6}{64}$$

<u>*Sposób III*</u>

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω to zbiór par uporządkowanych elementów ze zbioru 8-elementowego, zatem moc zbioru Ω jest równa $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$.

Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 15.

Wielokrotności liczby 15, które mogą być iloczynami elementów ze zbioru Ω, to $15, 30, 45$.

Wyznaczamy iloczyny, które spełniają powyższy warunek:

$15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(3, 5)$ oraz $(5, 3)$,

$30 = 6 \cdot 5 = 5 \cdot 6$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(6, 5)$ oraz $(5, 6)$,

$45 = 9 \cdot 5 = 5 \cdot 9$ – dwa iloczyny – dwa zdarzenia elementarne: $(9, 5)$ oraz $(5, 9)$.

Sprzyjających zdarzeń elementarnych jest 6, więc $P(A) = \frac{6}{64}$.

Zadanie 36. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków […], pól powierzchni i objętości graniastosłupów.

Zasady oceniania

5 pkt – obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa $ABCDEF$: $P = 24 + 90\sqrt{3}$
oraz obliczenie objętości graniastosłupa $ABCDEF$: $V = 60\sqrt{3}$.

4 pkt – obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa $ABCDEF$: $P = 24 + 90\sqrt{3}$
ALBO
– obliczenie objętości graniastosłupa $ABCDEF$: $V = 60\sqrt{3}$.

3 pkt – obliczenie pola podstawy graniastosłupa $ABCDEF$: $P_p = 12$ **oraz** obliczenie wysokości H graniastosłupa $ABCDEF$: $H = 5\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi BC podstawy graniastosłupa $ABCDEF$: $|BC| = 5$
oraz obliczenie pola podstawy graniastosłupa $ABCDEF$: $P_p = 12$
ALBO
– obliczenie wysokości H graniastosłupa $ABCDEF$: $H = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie długości krawędzi BC podstawy graniastosłupa $ABCDEF$: $|BC| = 5$
ALBO
– obliczenie pola podstawy graniastosłupa $ABCDEF$: $P_p = 12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pole powierzchni całkowitej, przyjmuje, że:

a) wszystkie ściany boczne są przystającymi prostokątami lub

b) graniastosłup ma 4 ściany boczne,

lub

c) graniastosłup ma jedną podstawę,

ale poprawnie obliczy objętość graniastosłupa, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej

b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa

c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

d) zinterpretowanie trójkąta ABC jako równoramiennego (ale nie równobocznego), w którym $|AB| = |BC| = 8$

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że podstawa graniastosłupa jest trójkątem równobocznym i na tym opiera całe swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów** (o ile nie nabył praw do innej punktacji).

Przykładowe pełne rozwiązanie

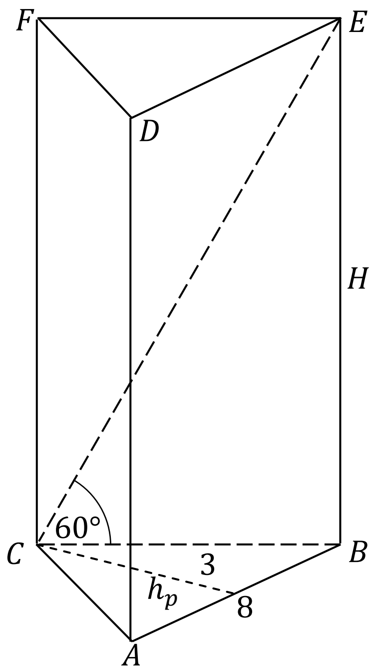
Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku.

Oznaczamy h_p – wysokość podstawy graniastosłupa, poprowadzona z wierzchołka C.

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoramienny o wysokości $h_p = 3$ i długości podstawy $a = |AB| = 8$.

Obliczamy pole podstawy graniastosłupa $P_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość krawędzi BC:



$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(h_p\right)^2 = |BC|^2$$

$$16 + 9 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 25$$

$$|BC| = 5$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznej tangens dla kąta BCE, obliczamy wysokość H (długość krawędzi BE) graniastosłupa:

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{H}{|BC|}$$

$$\sqrt{3} = \frac{H}{5}$$

Zatem $H = 5\sqrt{3}$.

Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa $ABCDEF$:

$$P = P_b + 2P_p = 2 \cdot H \cdot |BC| + |AB| \cdot H + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_p = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 + 8 \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 12$$

$$P = 24 + 90\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa $ABCDEF$:

$$V = P_p \cdot H = 12 \cdot 5\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2023.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 30.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $-x^2-2x+3$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
ALBO
– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
ALBO
– poprawne rozwiązanie nierówności $x^2-2x>0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
ALBO
– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(1,-3)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Nie stosuje się uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 32.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 33.

1 pkt – obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** wykorzystanie podobieństwa trójkątów i zapisanie związku między długościami przyprostokątnych trójkąta T_2 : $c_1 = 13$ i $\frac{a_2}{b_2} = \frac{12}{5}$

ALBO

– obliczenie długości c_1 przeciwprostokątnej trójkąta T_1 **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednej z przyprostokątnych trójkąta T_2, np. $c_1 = 13$ i $\frac{13}{12} = \frac{26}{a_2}$, $c_1 = 13$ i $\frac{13}{5} = \frac{26}{b_2}$.

Zadanie 34.

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC (lub zapisanie równania prostej AC): $\frac{3}{4}$.

Zadanie 35.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 64 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu ($|A| = 5$) i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{5}{64}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 36.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.