

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-R1**

**MAJ 2015**

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

**Zadanie 1. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a  = b$ , $ x - a  > b$ , $ x - a  < b$ (R1.1).	<b>D</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9).	<b>A</b>
--	--	----------

**Zadanie 3. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	<b>C</b>
--	---	----------

**Zadanie 4. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).	<b>A</b>
--	--	----------

**Zadanie 5. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość punktu od prostej (R8.4).	<b>B</b>
--	--	----------

**Zadanie 6. (0–2)**

Oblicz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4} \right)$ . W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).
--	---

Odpowiedź

1	4	3
---	---	---

**Zadanie 7. (0–2)**

Liczby  $(-1)$  i  $3$  są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej  $f$ . Oblicz  $\frac{f(6)}{f(12)}$ .

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (4.10).
--	--

**Rozwiązanie (I sposób)**

Zapisujemy trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x+1)(x-3), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Stąd zaś wynika, że

$$\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a \cdot 7 \cdot 3}{a \cdot 13 \cdot 9} = \frac{7}{39}.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje..... 1 p.**

gdy wykorzysta postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisze  $f(6) = a \cdot 7 \cdot 3$  lub  $f(12) = a \cdot 13 \cdot 9$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**

gdy obliczy wartość  $\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{7}{39}$ .

### Rozwiązanie (II sposób)

Z wzorów Viète'a otrzymujemy  $-\frac{b}{a}=2$  oraz  $\frac{c}{a}=-3$ . Stąd  $b=-2a$  oraz  $c=-3a$ . Wzór funkcji  $f$  możemy zapisać w postaci  $f(x)=ax^2-2ax-3a$ . Obliczamy wartości funkcji dla argumentów 6 i 12

$$f(6)=36a-12a-3a=21a \text{ oraz } f(12)=144a-24a-3a=117a.$$

Zatem  $\frac{f(6)}{f(12)}=\frac{21a}{117a}=\frac{7}{39}$ .

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy wykorzysta wzory Viète'a i zapisze  $f(6)=36a-12a-3a$  lub  $f(12)=144a-24a-3a$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy obliczy wartość  $\frac{f(6)}{f(12)}=\frac{7}{39}$ .

### Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

V. Rozumowanie i argumentacja	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne; używa wzory skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ , $a^2 - b^2$ . (R2.6, 2.1).
-------------------------------	--

### Rozwiązanie (I sposób)

Przekształćmy nierówność równoważnie w następujący sposób

$$x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0,$$
$$(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0.$$

Lewa strona tej nierówności jest sumą trzech składników, z których dwa pierwsze są nieujemne, a trzeci dodatni, więc suma ta jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci, z której lewą stronę łatwo można zapisać w postaci sumy składników nieujemnych:  $x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci:  $(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0$  i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

**Zdający otrzymuje.....3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Przekształćmy nierówność równoważnie w następujący sposób

$$\begin{aligned}x^4 - x^2 - 2x + 2 + 1 &> 0, \\x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) + 1 &> 0, \\x^2(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) + 1 &> 0, \\(x - 1)(x^2(x + 1) - 2) + 1 &> 0, \\(x - 1)(x^3 + x^2 - 2) + 1 &> 0, \\(x - 1)(x^3 - x^2 + 2x^2 - 2) + 1 &> 0, \\(x - 1)(x^2(x - 1) + 2(x^2 - 1)) + 1 &> 0 \\(x - 1)(x^2(x - 1) + 2(x - 1)(x + 1)) + 1 &> 0, \\(x - 1)^2(x^2 + 2(x + 1)) + 1 &> 0, \\(x - 1)^2(x^2 + 2x + 1 + 1) + 1 &> 0, \\(x - 1)^2((x + 1)^2 + 1) + 1 &> 0.\end{aligned}$$

Ponieważ  $(x - 1)^2 \geq 0$  oraz  $(x + 1)^2 + 1 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , więc iloczyn  $(x - 1)^2((x + 1)^2 + 1)$  jest nieujemny. Stąd wynika, że lewa strona nierówności jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje.....1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci:  $x^2(x^2 - 1) - 2(x - 1) + 1 > 0$ .

**Zdający otrzymuje.....2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci:  $(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2) + 1 > 0$  i nie uzasadni prawdziwości tej nierówności.

**Zdający otrzymuje.....3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie (III sposób)**

Rozważmy wielomian  $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$ .

Pochodna tego wielomianu jest równa  $f'(x) = 4x^3 - 2x - 2$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

Ponieważ  $f'(1) = 4 - 2 - 2 = 0$ , więc wielomian  $f'$  jest podzielny przez dwumian  $x - 1$ .

Wykorzystując schemat Hornera, otrzymujemy

	4	0	-2	-2
1	4	4	2	0

Zatem  $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 2)$ . Wyróżnik trójmianu kwadratowego  $4x^2 + 4x + 2$  jest równy  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$ , współczynnik przy  $x^2$  jest dodatni, więc  $4x^2 + 4x + 2 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wynika stąd, że

$$f'(x) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 1,$$

$$f'(x) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > 1,$$

$$f'(x) < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x < 1.$$

To oznacza, że w punkcie  $x = 1$  wielomian  $f$  osiąga minimum lokalne, które jest jednocześnie jego najmniejszą wartością, gdyż w przedziale  $(-\infty, 1)$  wielomian  $f$  jest funkcją malejącą, a w przedziale  $(1, +\infty)$  rosnącą.

Ponieważ  $f(1) = 1^4 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1$ , więc  $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ , czyli  $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . To kończy dowód.

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy obliczy pochodną wielomianu  $f(x) = x^4 - x^2 - 2x + 3$ , zapisze, że liczba 1 jest pierwiastkiem pochodnej:  $f'(x) = 4x^3 - 2x - 2$ ,  $f'(1) = 4 - 2 - 2 = 0$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

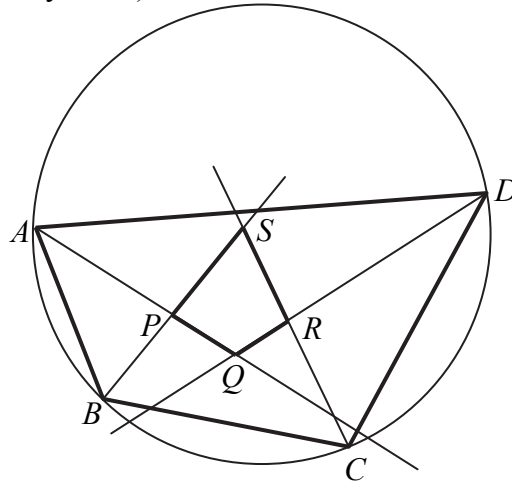
gdy zapisze pochodną w postaci:  $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 2)$  i zbada znak pochodnej, ale nie przeprowadzi rozumowania do końca lub przeprowadzi je z błędem.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 9. (0–3)**

Dwusieczne czworokąta  $ABCD$  wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach:  $P, Q, R, S$  (zobacz rysunek).



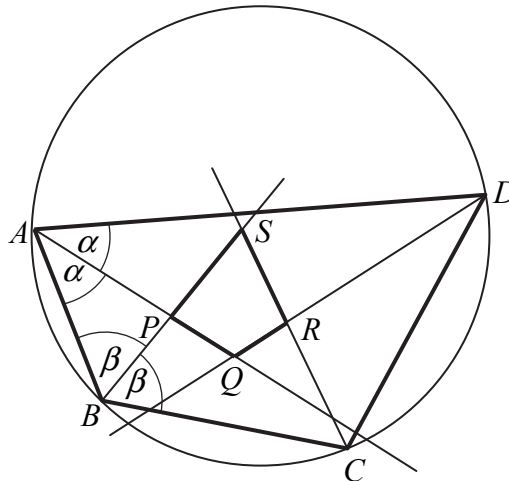
Wykaż, że na czworokącie  $PQRS$  można opisać okrąg.

V. Rozumowanie  
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1).

**Rozwiązanie (I sposób)**

Oznaczmy  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ .



Ponieważ czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ADR| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Zauważmy, że

$$|\sphericalangle AQR| = 180^\circ - (|\sphericalangle DAQ| + |\sphericalangle ADQ|) = 180^\circ - (\alpha + (90^\circ - \beta)) = 90^\circ - \alpha + \beta$$

oraz

$$|\sphericalangle BSR| = 180^\circ - (|\sphericalangle BCR| + |\sphericalangle CBP|) = 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + \beta) = 90^\circ + \alpha - \beta$$

Zatem

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = (90^\circ - \alpha + \beta) + (90^\circ + \alpha - \beta) = 180^\circ.$$

Suma wszystkich kątów czworokąta jest równa  $360^\circ$ , więc suma pozostałych dwóch kątów czworokąta  $PQRS$  także jest równa  $180^\circ$ . To oznacza, że na czworokącie  $PQRS$  można opisać okrąg, co kończy dowód.

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

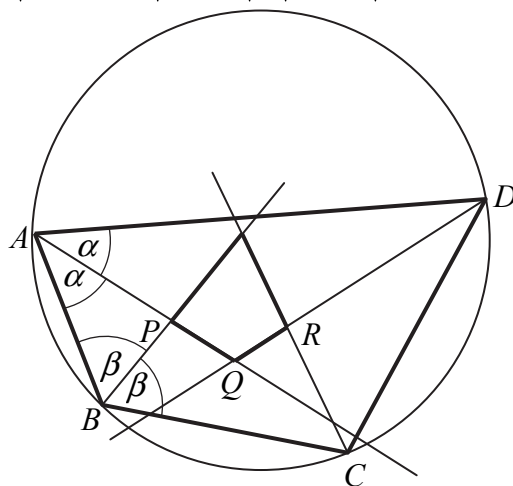
**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
 gdy przyjmie oznaczenia dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych czworokąta  $ABCD$  (lub oznaczy połowy tych kątów) np.:  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$  oraz zapisze dwa pozostałe kąty wewnętrzne tego czworokąta (lub ich połowy) w zależności od  $\alpha$  i  $\beta$ :  
 $|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = 90^\circ - \alpha$ ,  $|\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = 90^\circ - \beta$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
 gdy wyznaczy dwa przeciwległe kąty czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha$  i  $\beta$ :  
 $|\sphericalangle AQP| = 90^\circ - \alpha + \beta$ ,  $|\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \alpha - \beta$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**  
 gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta  $PQRS$  jest równa  $180^\circ$ .

### Rozwiązanie (II sposób)

Oznaczmy  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ .



Ponieważ czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg, więc

$$|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Zauważmy, że

$$|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle APB| = 180^\circ - (|\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle BAP|) = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

oraz

$$|\sphericalangle SRQ| = |\sphericalangle CRD| = 180^\circ - (|\sphericalangle DCR| + |\sphericalangle CDR|) = 180^\circ - ((90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)) = \alpha + \beta.$$

Zatem

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Suma wszystkich kątów czworokąta jest równa  $360^\circ$ , więc suma pozostałych dwóch kątów czworokąta  $PQRS$  także jest równa  $180^\circ$ . To oznacza, że na czworokącie  $PQRS$  można opisać okrąg, co kończy dowód.

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

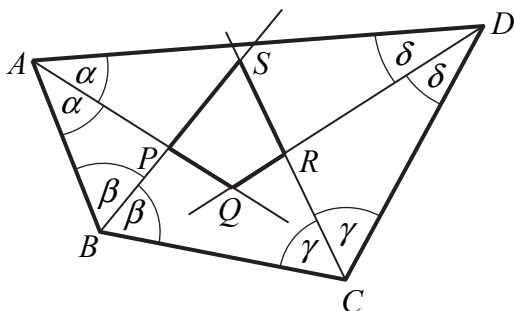
**Zdający otrzymuje..... 1 p.**  
gdy przyjmie oznaczenia dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych czworokąta  $ABCD$  (lub oznaczy połowy tych kątów) np.:  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAD| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$  oraz zapisze dwa pozostałe kąty wewnętrzne tego czworokąta (lub ich połowy) w zależności od  $\alpha$  i  $\beta$ :  
 $|\sphericalangle BCR| = |\sphericalangle DCR| = 90^\circ - \alpha$ ,  $|\sphericalangle CDR| = |\sphericalangle ADR| = 90^\circ - \beta$ .

**Zdający otrzymuje..... 2 p.**  
gdy wyznaczy dwa przeciwległe kąty czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha$  i  $\beta$ :  
 $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ,  $|\sphericalangle SRQ| = \alpha + \beta$ .

**Zdający otrzymuje..... 3 p.**  
gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta  $PQRS$  jest równa  $180^\circ$ .

### Rozwiązanie (III sposób)

Oznaczmy:  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ ,  $|\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma$ ,  
 $|\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$ .



Suma kątów czworokąta  $ABCD$  jest równa

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ.$$

Stąd

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Z bilansu kątów w trójkątach  $ADQ$  i  $BCS$  otrzymujemy

$$|\sphericalangle AQD| = 180^\circ - (\alpha + \delta) \text{ oraz } |\sphericalangle BSC| = 180^\circ - (\beta + \gamma).$$

Suma przeciwległych kątów  $PQR$  i  $PSR$  czworokąta  $PQRS$  jest więc równa

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\alpha + \delta) + 180^\circ - (\beta + \gamma) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

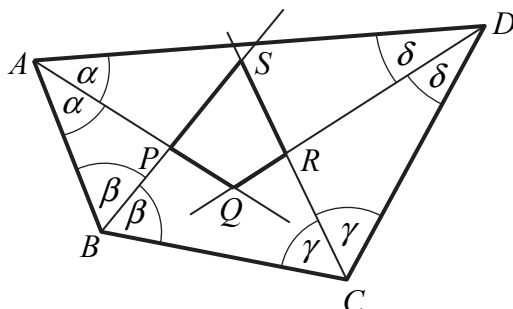
Stąd i z (1) otrzymujemy

$$|\sphericalangle PQR| + |\sphericalangle PSR| = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że suma pozostałych dwóch kątów czworokąta  $PQRS$  także jest równa  $180^\circ$ .  
Zatem na czworokącie  $PQRS$  można opisać okrąg. To kończy dowód.

### Rozwiązanie (IV sposób)

Oznaczmy:  $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta$ ,  $|\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma$ ,  
 $|\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$ .



Suma kątów czworokąta  $ABCD$  jest równa

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ.$$

Stąd

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Z bilansu kątów w trójkątach  $ABP$  i  $CDR$  otrzymujemy

$$|\sphericalangle BPA| = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ oraz } |\sphericalangle CRD| = 180^\circ - (\gamma + \delta).$$

Kąty  $BPA$  i  $SPQ$  są wierzchołkowe, podobnie jak kąty  $CRD$  i  $SRQ$ . Zatem

$$|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ oraz } |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta).$$

Suma przeciwległych kątów  $SPQ$  i  $SRQ$  czworokąta  $PQRS$  jest więc równa

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta) + 180^\circ - (\gamma + \delta) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że suma pozostałych dwóch kątów czworokąta  $PQRS$  także jest równa  $180^\circ$ . Zatem na czworokącie  $PQRS$  można opisać okrąg. To kończy dowód.

### Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy przyjmie oznaczenia kątów wewnętrznych czworokąta  $ABCD$  (lub oznaczy połowy tych kątów), np.:

$$|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle DAP| = \alpha, \quad |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ABP| = \beta, \quad |\sphericalangle DCR| = |\sphericalangle BCR| = \gamma, \quad |\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CDR| = \delta$$

i zapisze:

- że ich suma jest równa  $360^\circ$ :  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty  $PQR$  i  $PSR$  czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ :  $|\sphericalangle PQR| = 180^\circ - (\alpha + \delta)$ ,  $|\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty  $SPQ$  i  $SRQ$  czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ :  $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ,  $|\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta)$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy zapisze, że  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$  oraz

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty  $PQR$  i  $PSR$  czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ :  $|\sphericalangle PQR| = 180^\circ - (\alpha + \delta)$ ,  $|\sphericalangle PSR| = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

albo

- wyznaczy dwa przeciwległe kąty  $SPQ$  i  $SRQ$  czworokąta  $PQRS$  w zależności od  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $\delta$ :  $|\sphericalangle SPQ| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ,  $|\sphericalangle SRQ| = 180^\circ - (\gamma + \delta)$ .

**Zdający otrzymuje.....3 p.**

gdy wykaże, że suma dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta  $PQRS$  jest równa  $180^\circ$ .

### Zadanie 10. (0–4)

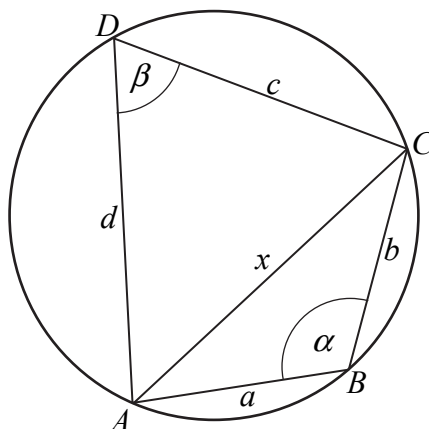
Długości boków czworokąta  $ABCD$  są równe:  $|AB|=2$ ,  $|BC|=3$ ,  $|CD|=4$ ,  $|DA|=5$ .

Na czworokącie  $ABCD$  opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej  $AC$  tego czworokąta.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.1, R7.5).
-----------------------------------	--

### Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia  $a = |AB| = 2$ ,  $b = |BC| = 3$ ,  $c = |CD| = 4$ ,  $d = |DA| = 5$ ,  $x = |AC|$ ,  $\alpha = |\sphericalangle ABC|$  jak na rysunku.



Ponieważ na czworokącie  $ABCD$  jest opisany okrąg, więc  $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - \alpha$ .

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta  $ABC$  otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \alpha,$$

$$(1) \quad |AC|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha.$$

Teraz ponownie zastosujemy twierdzenie cosinusów, tym razem do trójkąta  $ACD$ :

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |DA| \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$(2) \quad |AC|^2 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha.$$

Porównujemy prawe strony równań (1) i (2):

$$\begin{aligned} 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha &= 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha, \\ 13 - 12 \cdot \cos \alpha &= 41 + 40 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\frac{28}{52} = -\frac{7}{13}.$$

Podstawiamy otrzymaną wartość do równania (1) i otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{7}{13}\right) = 13 + \frac{84}{13} = \frac{169 + 84}{13} = \frac{253}{13}.$$

Stąd wynika, że długość przekątnej  $AC$  jest równa:

$$|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

**Uwaga**

Układ równań (1) i (2) możemy rozwiązać rugując  $\cos \alpha$ . Wtedy mnożymy obie strony równania (1) przez 10, a obie strony równania (2) przez 3 i mamy

$$10x^2 = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 9 - 120 \cdot \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad 3x^2 = 3 \cdot 16 + 3 \cdot 25 + 120 \cdot \cos \alpha.$$

Dodając stronami otrzymane równania mamy

$$13x^2 = 253.$$

Stąd

$$x = |AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta  $ABC$  albo do trójkąta  $CDA$ :

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha \quad \text{albo} \quad x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \beta$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze

- równanie z jedną niewiadomą, np.:  
 $2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$

albo

- układ równań w postaci:  
 $10x^2 = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 9 - 120 \cdot \cos \alpha$  i  $3x^2 = 3 \cdot 16 + 3 \cdot 25 + 120 \cdot \cos \alpha.$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający

- obliczy cosinus kąta  $ABC$ :  $\cos a = -\frac{7}{13}$

albo

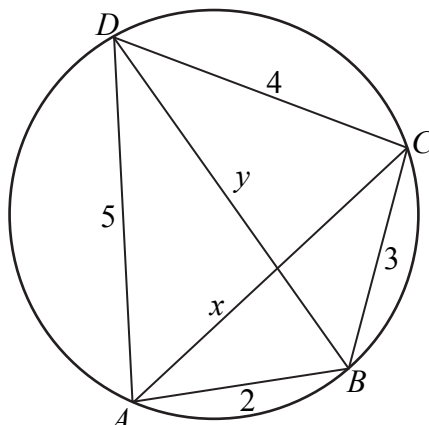
- zapisze równanie z niewiadomą  $x$ , np.:  $13x^2 = 253$ .

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

Zdający obliczy długość przekątnej  $AC$ :  $|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}.$

### Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia  $x = |AC|$   $y = |BD|$  jak na rysunku i niech  $R$  oznacza promień okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ .



Z twierdzenia Ptolemeusza otrzymujemy równanie

$$xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3,$$
$$xy = 23.$$

Okrąg opisany na czworokącie  $ABCD$  jest jednocześnie okręgiem opisanym na każdym z trójkątów  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  i  $ABD$ . Pole czworokąta  $ABCD$  możemy zapisać na dwa sposoby

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{CDA} = P_{BCD} + P_{ABD}.$$

Stąd i ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{abc}{4R}$  otrzymujemy równanie

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot x}{4R} + \frac{4 \cdot 5 \cdot x}{4R} = \frac{2 \cdot 5 \cdot y}{4R} + \frac{3 \cdot 4 \cdot y}{4R},$$
$$26x = 22y,$$
$$y = \frac{13}{11}x.$$

Stąd i z równości  $xy = 23$  otrzymujemy

$$x \cdot \frac{13}{11}x = 23,$$
$$x^2 = \frac{23 \cdot 11}{13},$$
$$x = \sqrt{\frac{253}{13}}.$$

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zapisze

- równanie wynikające z twierdzenia Ptolemeusza:  $xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3$

albo

- pole czworokąta  $ABCD$  na dwa sposoby i zapisze  $P_{ABC} + P_{CDA} = P_{BCD} + P_{ABD}$  lub

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot x}{4R} + \frac{4 \cdot 5 \cdot x}{4R} = \frac{2 \cdot 5 \cdot y}{4R} + \frac{3 \cdot 4 \cdot y}{4R}.$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ :

$$xy = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \text{ oraz } 2 \cdot 3 \cdot x + 4 \cdot 5 \cdot x = 2 \cdot 5 \cdot y + 3 \cdot 4 \cdot y.$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $x \cdot \frac{13}{11} x = 23$  lub  $\frac{11}{13} y \cdot y = 23$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy długość przekątnej  $AC$ :  $x = |AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}$ .

**Zadanie 11. (0–4)**

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (R10.3).
-----------------------------------	---

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

$A$  - zdarzenie polegające na tym, że z drugiej urny wylosujemy dwie kule białe,

$B_1$  - zdarzenie polegające na tym, że z pierwszej urny wylosujemy kulę białą.

$B_2$  - zdarzenie polegające na tym, że z pierwszej urny wylosujemy kulę czarną.

Wówczas  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  oraz  $B_1 \cup B_2 = \Omega$ . Następnie

$$P(B_1) = \frac{3}{8} > 0 \text{ oraz } P(B_2) = \frac{5}{8} > 0.$$

Zatem spełnione są założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Obliczamy teraz prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{22} \text{ oraz } P(A|B_2) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{7}{22}.$$

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{45 + 35}{8 \cdot 22} = \frac{80}{8 \cdot 22} = \frac{5}{11}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający opisze zdarzenia  $A$ ,  $B_1$  i  $B_2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy prawdopodobieństwa  $P(B_1) = \frac{3}{8}$  oraz  $P(B_2) = \frac{5}{8}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa  $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$ ,  $P(A|B_2) = \frac{7}{22}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa  $P(B_1) = \frac{3}{8}$  oraz  $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$

albo

- obliczy prawdopodobieństwa  $P(B_2) = \frac{5}{8}$  oraz  $P(A|B_2) = \frac{7}{22}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwa:  $P(B_1) = \frac{3}{8}$ ,  $P(B_2) = \frac{5}{8}$ ,  $P(A|B_1) = \frac{15}{22}$ ,

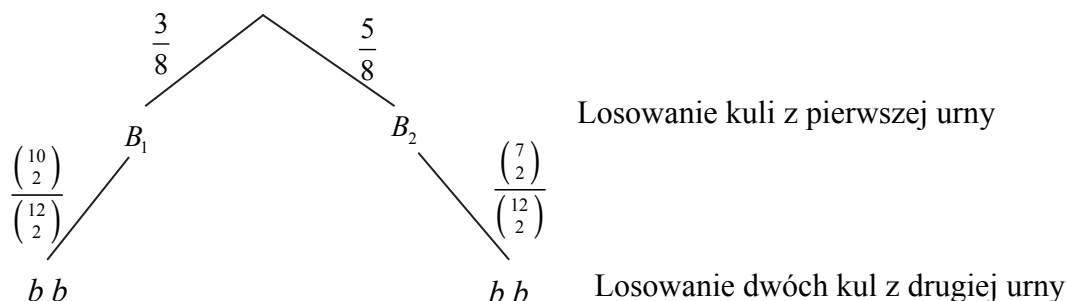
$$P(A|B_2) = \frac{7}{22}.$$

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

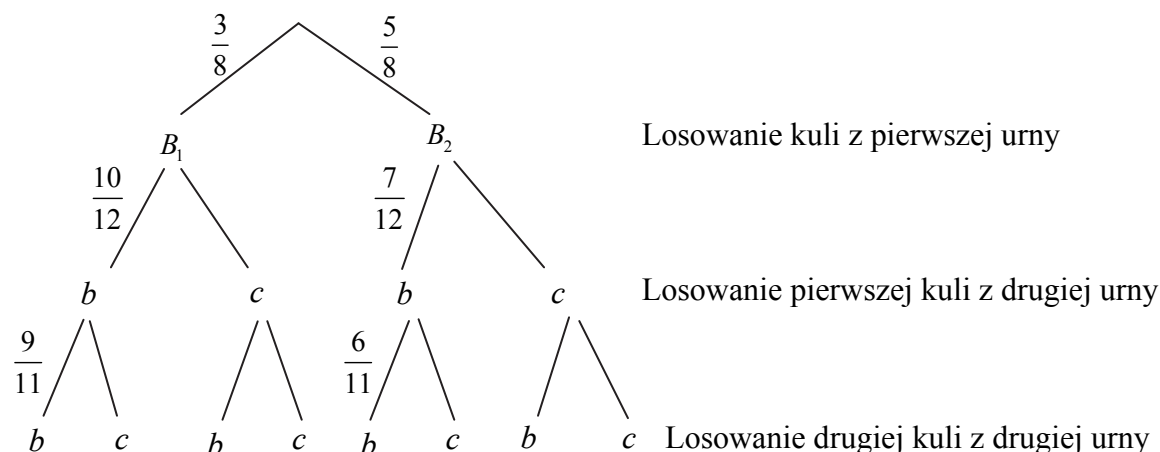
Zdający obliczy prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{5}{11}$ .

**Rozwiązanie (II sposób)**

Przyjmijmy, że  $A$  to zdarzenie polegające na tym, że z drugiej urny wylosujemy dwie kule białe. Rysujemy drzewo z istotnymi gałęziami



lub



Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{45 + 35}{8 \cdot 22} = \frac{80}{8 \cdot 22} = \frac{5}{11}$$

lub

$$P(A) = \frac{\cancel{8}^1}{8^4} \cdot \frac{\cancel{10}^5}{\cancel{12}^4} \cdot \frac{9}{11} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{\cancel{12}^2} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{11} = \frac{45+35}{16 \cdot 11} = \frac{80}{176} = \frac{5}{11}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający narysuje drzewo ilustrujące losowanie (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze prawdopodobieństwa przynajmniej na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych gałęziach:  $\frac{3}{8}, \frac{10}{12}, \frac{9}{11}$

oraz  $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{6}{11}$  lub  $\frac{3}{8}, \binom{10}{2}$  oraz  $\frac{5}{8}, \binom{7}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{5}{11}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma prawdopodobieństwo ujemne lub większe od 1, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 12. (0–4)**

Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji  $f$ , które są równoległe do prostej o równaniu  $y = 4x$ .

IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3).
-----------------------------------	--

**Rozwiązanie**

Aby styczne były równoległe do prostej o równaniu  $y = 4x$ , ich współczynnik kierunkowy musi być równy 4. Obliczamy pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ .

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd  $4 = f'(x_0)$ . Wówczas

$$\begin{aligned}
3x_0^2 - 4x_0 &= 4, \\
3x_0^2 - 4x_0 - 4 &= 0, \\
\Delta &= 64, \\
x_0 &= -\frac{2}{3} \text{ lub } x_0 = 2.
\end{aligned}$$

Istnieją zatem dwie styczne do wykresu funkcji  $f$  równoległe do prostej o równaniu  $y = 4x$  w punktach  $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right)$  oraz  $P_2 = (2, 1)$ . Styczne mają zatem równania postaci  $y + \frac{5}{27} = 4\left(x + \frac{2}{3}\right)$  oraz  $y - 1 = 4(x - 2)$ , czyli  $y = 4x + \frac{67}{27}$  oraz  $y = 4x - 7$ .

Odp. Równania prostych stycznych mają postać:  $y = 4x + \frac{67}{27}$  oraz  $y = 4x - 7$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- obliczy pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = 3x^2 - 4x$

albo

- zapisze warunek  $f'(x_0) = 4$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający obliczy pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = 3x^2 - 4x$  i zapisze warunek  $f'(x_0) = 4$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający rozwiąże równanie  $3x_0^2 - 4x_0 = 4$  i obliczy współrzędne obu punktów styczności:

$$P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right), P_2 = (2, 1)$$

### Uwaga

Jeżeli zdający korzysta ze wzoru  $y = f'(x_0)x + b$ , gdzie  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ , to obliczenie współczynnika  $b$  traktujemy jak obliczenie drugiej współrzędnej punktu styczności.

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

Wyznaczenie równań stycznych:  $y = 4x + \frac{67}{27}$  i  $y = 4x - 7$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie współrzędne tylko jednego punktu styczności i w konsekwencji wyznaczy poprawnie równanie jednej stycznej, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 13. (0–5)**

Dany jest trójmian kwadratowy  $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$ , spełniające warunek  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ .

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).
--------------------------------	--

**Rozwiązanie**

Z treści zadania wynika, że  $m+1 \neq 0$ , czyli  $m \neq -1$ .

Trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\begin{aligned}\Delta &= (2(m-2))^2 - 4 \cdot (m+1) \cdot (-m+4) > 0, \\ 8m^2 - 28m &> 0, \\ 4m(2m-7) &> 0.\end{aligned}$$

Stąd  $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$ .

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$  jest zbiorem wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne pierwiastki.

Warunek  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^2 &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2), \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) &= 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ lub } x_1 + x_2 = 0 \text{ lub } 1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Równość  $x_1 - x_2 = 0$  przeczy założeniu  $x_1 \neq x_2$ .

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy równanie

$x_1 + x_2 = 0$  zapisać w postaci  $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$ . Stąd  $m = 2 \notin D$ .

Równanie  $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} &= 1, \\ \frac{4(m^2 - 4m + 4)}{(m+1)^2} + \frac{2m-8}{m+1} - 1 &= 0, \\ 4m^2 - 16m + 16 + (2m-8)(m+1) - (m+1)^2 &= 0, \\ 5m^2 - 24m + 7 &= 0.\end{aligned}$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby

$$m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5} \notin D \text{ oraz } m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5} \in D.$$

Istnieje zatem jedna wartość parametru  $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$ , dla której trójmian  $f$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie równania w postaci:

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0 \text{ lub równoważnej.}$$

**2 punkty** zdający otrzymuje za:

- zapisanie równości  $x_1 - x_2 = 0$  i stwierdzenie, że przeczy ona założeniu  $x_1 \neq x_2$  albo

- rozwiązanie równania  $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$ :  $m = 2$

albo

- zapisanie równania  $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$  w postaci, np.:  $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$ .

**3 punkty** zdający otrzymuje za:

- rozwiązanie równania  $\frac{-2(m-2)}{m+1} = 0$ :  $m = 2$

oraz

- rozwiązanie równania  $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$ :  $m_1 = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$ ,

$$m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}.$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru  $m$ :  $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$ . Za ten etap zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprawnie wykona etapy I i II rozwiązania albo poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu równania z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże równanie z etapu II.

**Uwagi:**

1. Akceptujemy rozwiązania, w których zdający nie zapisuje założenia  $m+1 \neq 0$ , które wynika ze sformułowania zadania.
2. Zdający nie musi rozwiązywać nierówności  $\Delta > 0$ , o ile sprawdzi czy dla  $m=2$ ,  $m = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$ ,  $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$  trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.
3. Jeżeli zdający podzieli obie strony równania  $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$  przez  $x_1^2 - x_2^2$  bez stosownego założenia i rozwiąże równanie  $1 = x_1^2 + x_2^2$ , otrzymując  $m = \frac{12 - \sqrt{109}}{5}$  lub  $m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}$ , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, przy czym **1 punkt** może otrzymać za rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ , **1 punkt** za zapisanie równania  $1 = x_1^2 + x_2^2$  w postaci równania wymiernego z jedną niewiadomą, np.:  $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$  oraz **1 punkt** za wyznaczenie tego rozwiązania równania, które spełnia nierówność  $\Delta > 0$ .
4. Jeżeli zdający nie rozwiązywał nierówności  $\Delta > 0$ , ale rozwiązał równanie  $\left(\frac{-2(m-2)}{m+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-m+4}{m+1} = 1$  i sprawdził, dla której z otrzymanych wartości  $m$  trójmian ma pierwiastki rzeczywiste, to otrzymuje **3 punkty**.

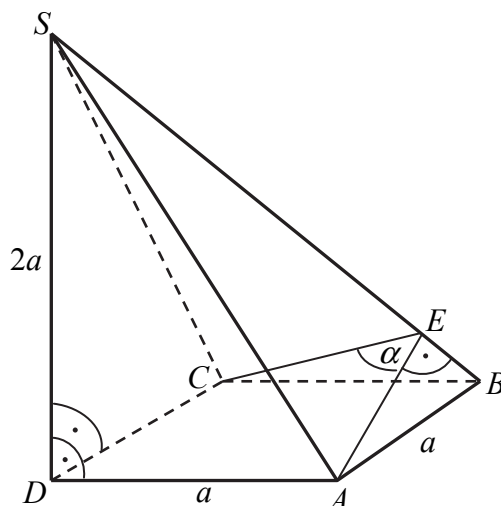
**Zadanie 14. (0–5)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCDS$  jest kwadrat  $ABCD$ . Krawędź boczna  $SD$  jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi  $ABS$  i  $CBS$  tego ostrosłupa.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).
-----------------------------------	--

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa  $|AC| = a\sqrt{2}$ .

Trójkąty  $ADS$  i  $CDS$  są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną  $DS$  oraz  $|AD|=|CD|$ ), więc krawędzie boczne  $AS$  i  $CS$  ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt  $ABS$  jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 + a^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek  $AE$  jest wysokością ściany bocznej  $ABS$ . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta  $ABS$  na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

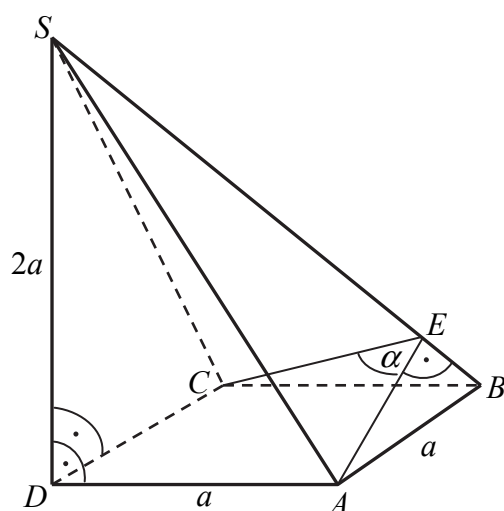
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $AEC$  otrzymujemy

$$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha.$$

Stąd  $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ . Zatem  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

### Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa  $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$ .

Trójkąty  $ADS$  i  $CDS$  są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną  $DS$  oraz  $|AD| = |CD|$ ), więc krawędzie boczne  $AS$  i  $CS$  ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt  $BDS$  jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek  $AE$  jest wysokością ściany bocznej  $ABS$ . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta  $ABS$  na dwa sposoby

$$\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2} a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $AEC$  otrzymujemy

$$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha.$$

Stąd  $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ . Zatem  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

### Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa  $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$ .

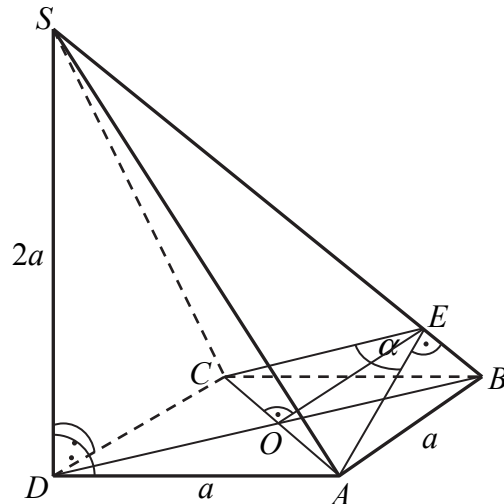
Trójkąty  $ADS$  i  $CDS$  są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną  $DS$  oraz  $|AD| = |CD|$ ), więc krawędzie boczne  $AS$  i  $CS$  ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt  $BDS$  jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$



Odcinek  $AE$  jest wysokością ściany bocznej  $ABS$ . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta  $ABS$  na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

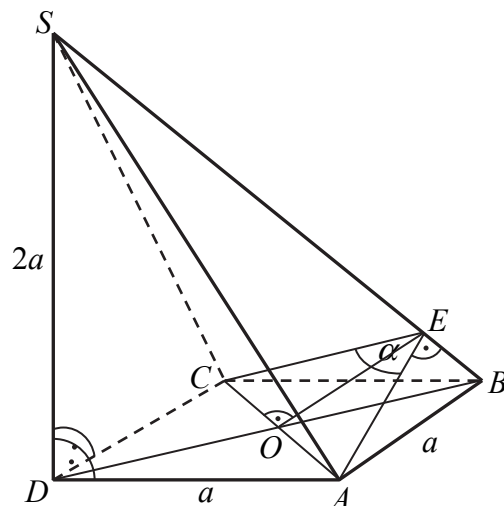
Zatem cosinus.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

#### Rozwiązanie (IV sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa  $|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$ .

Trójkąty  $ADS$  i  $CDS$  są przystające (oba są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną  $DS$  oraz  $|AD| = |CD|$ ), więc krawędzie boczne  $AS$  i  $CS$  ostrosłupa mają tę samą długość.

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|SA| = |SC| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Trójkąt  $BDS$  jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa

$$|SB| = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

Odcinek  $AE$  jest wysokością ściany bocznej  $ABS$ . Jego długość możemy wyznaczyć zapisując np. pole trójkąta  $ABS$  na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = a\sqrt{\frac{5}{6}} = |CE|.$$

Odcinek  $OE$  jest wysokością trójkąta  $AEC$ , więc  $|OE| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Pole trójkąta  $AEC$  możemy zapisać na dwa sposoby

$$\frac{1}{2}|AE| \cdot |CE| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}|AC| \cdot |OE|,$$

czyli

$$\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy długości krawędzi bocznych  $SA$ ,  $SC$  i  $SB$  ostrosłupa  $ABCDS$ :  
 $|SA| = |SC| = a\sqrt{5}$ ,  $|SB| = a\sqrt{6}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnienie błędów.
- zaznaczy poprawnie kąt między ścianami  $ABS$  i  $CBS$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy długość odcinka  $AE$ :  $|AE| = |CE| = a\sqrt{\frac{5}{6}}$

albo

- zapisze jedną z funkcji trygonometrycznych połowy kąta  $\alpha$ : np.  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|AO|}{|AE|}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $AEC$ :  
 $2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha$

albo

- obliczy sinus połowy kąta  $\alpha$ :  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

albo

- obliczy wysokość  $OE$  trójkąta  $ACE$ :  $|OE| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy cosinus kąta  $AEC$ :  $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$

albo

- zapisze równanie, z którego można obliczyć  $\sin \alpha$ :  $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot a\sqrt{\frac{5}{6}} \sin \alpha = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Wyznaczenie sinusa kąta  $AEC$ :  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi  $ABS$  i  $BCS$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za wyznaczenie długości krawędzi bocznych.

**Zadanie 15. (0–6)**

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). 13. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$ (3.7).
-----------------------------------	---

**Rozwiązanie (I sposób)**

Suma współczynników wielomianu  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  jest równa  $1 + a + b + c = 0$ . Niech  $p$  oznacza najmniejszy pierwiastek wielomianu  $W$ . Ponieważ pierwiastki wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, więc pozostałe dwa pierwiastki są równe  $p + 3$  oraz  $p + 6$ .

a) Wielomian możemy więc zapisać w postaci iloczynowej

$$W(x) = (x - p)(x - p - 3)(x - p - 6).$$

Stąd

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^2 - px - 3x - px + p^2 + 3p)(x - p - 6), \\ W(x) &= x^3 - px^2 - 6x^2 - px^2 + p^2x + 6px + p^2x - p^3 - 6p^2 + 3px - 3p^2 - 18p, \\ W(x) &= x^3 + (-3p - 9)x^2 + (3p^2 + 18p + 18)x + (-p^3 - 9p^2 - 18p). \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki wielomianu, otrzymując układ równań:

$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

b) Możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p + 3)^3 + a(p + 3)^2 + b(p + 3) + c = 0 \\ (p + 6)^3 + a(p + 6)^2 + b(p + 6) + c = 0 \end{cases}$$

Stąd po przekształceniach, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

c) Korzystając ze wzorów Viète'a  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = b \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$ , możemy zapisać układ

równań, otrzymując kolejno

$$\begin{cases} p+p+3+p+6=-a \\ p \cdot (p+3)+p \cdot (p+6)+(p+3) \cdot (p+6)=b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6)=-c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-3p-9 \\ b=3p^2+18p+18 \\ c=-p^3-9p^2-18p \end{cases}$$

Stąd i z równości  $1+a+b+c=0$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} (-3p-9)+(3p^2+18p+18)+(-p^3-9p^2-18p)+1=0, \\ p^3+6p^2+3p-10=0. \end{aligned}$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc z twierdzenia Bézouta wynika, że wielomian  $p^3+6p^2+3p-10$  jest podzielny przez dwumian  $p-1$ .

Wykonujemy dzielenie, stosując np. schemat Hornera.

	1	6	3	-10
1	1	7	10	0

Równanie możemy więc zapisać w postaci  $(p-1)(p^2+7p+10)=0$ .

Pozostałe rozwiązania równania  $p^3+6p^2+3p-10=0$  to pierwiastki trójmianu kwadratowego  $p^2+7p+10$ , czyli liczby  $p=-5$ ,  $p=-2$ .

Gdy  $p=1$ , to wtedy  $a=-12$ ,  $b=39$ ,  $c=-28$ .

Gdy  $p=-5$ , to wtedy  $a=6$ ,  $b=3$ ,  $c=-10$ .

Gdy  $p=-2$ , to wtedy  $a=-3$ ,  $b=-6$ ,  $c=8$ .

Odpowiedź: Współczynniki  $a, b, c$  są równe:  $\begin{cases} a=-12 \\ b=39 \\ c=-28 \end{cases}$  lub  $\begin{cases} a=-3 \\ b=-6 \\ c=8 \end{cases}$  lub  $\begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=-10 \end{cases}$

### Rozwiązanie (II sposób)

Z równości  $1+a+b+c=0$  otrzymujemy  $c=-1-a-b$ . Wielomian  $W$  możemy zapisać w postaci

$$W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1 - a - b,$$

$$W(x) = x^3 - 1 + ax^2 - a + bx - b,$$

$$W(x) = (x-1)(x^2+x+1) + a(x^2-1) + b(x-1),$$

$$W(x) = (x-1)(x^2 + (a+1)x + a + b + 1).$$

Stąd wynika, że liczba  $x=1$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W$ .

Dalszą część rozwiązania możemy przeprowadzić na dwa sposoby

- a) Pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3, więc mamy trzy takie ciągi  $(1, 4, 7)$ ,  $(-2, 1, 4)$ ,  $(-5, -2, 1)$ . Wielomian możemy wówczas zapisać

w postaci iloczynowej, odpowiednio:

$$W(x) = (x-1)(x-4)(x-7), \quad W(x) = (x+2)(x-1)(x-4), \quad W(x) = (x+5)(x+2)(x-1).$$

Po doprowadzeniu do postaci uporządkowanej mamy

$$W(x) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28, \quad W(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8, \quad W(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10.$$

Wyznaczamy odpowiednio współczynniki wielomianu  $W$ :

$$(a = -12, b = 39, c = -28) \text{ lub } (a = -3, b = -6, c = 8) \text{ lub } (a = 6, b = 3, c = -10).$$

b) Niech  $x_1$  i  $x_2$  oznaczają pierwiastki trójmianu  $T(x) = x^2 + (a+1)x + a+b+1$ . Możemy założyć, że  $x_1 \leq x_2$ . Pierwiastki wielomianu  $W$  tworzą ciąg arytmetyczny, więc z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy np.:

$$(x_1 = 4, x_2 = 7) \text{ lub } (x_1 = -2, x_2 = 4) \text{ lub } (x_1 = -5, x_2 = -2)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, otrzymujemy trzy układy równań

$$\begin{cases} 4+7=-(a+1) \\ 4 \cdot 7 = a+b+1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2+4=-(a+1) \\ -2 \cdot 4 = a+b+1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -5-2=-(a+1) \\ -5 \cdot (-2) = a+b+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 11=-(a+1) \\ 28 = a+b+1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2=-(a+1) \\ -8 = a+b+1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -7=-(a+1) \\ 10 = a+b+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

Obliczamy odpowiednio  $c = -1 - a - b$ :

$$\begin{cases} a = -12 \\ b = 39 \\ c = -28 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases}$$

### Rozwiązanie (III sposób)

Suma współczynników wielomianu  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  jest równa  $1 + a + b + c = 0$ .

Z równości  $1 + a + b + c = 0$  wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W$ .

Ponieważ pierwiastki wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3, to możemy zapisać trzy ciągi arytmetyczne, których jednym z wyrazów jest liczba 1:  $(1, 4, 7)$ ,  $(-2, 1, 4)$ ,

$(-5, -2, 1)$ .

Stąd wielomian  $W$  możemy więc zapisać w postaci:

$$W(x) = (x-1)(x-4)(x-7) \text{ lub } W(x) = (x+2)(x-1)(x-4),$$

$$\text{lub } W(x) = (x+5)(x+2)(x-1)$$

Po doprowadzeniu do postaci uporządkowanej mamy

$$W(x) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28 \text{ lub } W(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8, \text{ lub } W(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10.$$

Wyznaczamy współczynniki wielomianu  $W$ :

$$(a = -12, b = 39, c = -28) \text{ lub } (a = -3, b = -6, c = 8), \text{ lub } (a = 6, b = 3, c = -10).$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający

- zapisze wielomian  $W$  w postaci iloczynowej, np.:  $W(x) = (x-p)(x-p-3)(x-p-6)$ , gdzie  $p$  jest pierwiastkiem wielomianu

albo

- zapisze układ równań, gdzie  $p$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$\begin{cases} p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \\ (p+3)^3 + a(p+3)^2 + b(p+3) + c = 0 \\ (p+6)^3 + a(p+6)^2 + b(p+6) + c = 0 \end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań, korzystając ze wzorów Viète'a

$$\begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p \cdot (p+3) + p \cdot (p+6) + (p+3) \cdot (p+6) = b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6) = -c \end{cases}$$

albo

- wyznaczy  $c = -1 - a - b$  i zapisze wielomian  $W$  w postaci  $W(x) = x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.**

Zdający zapisze

- układ równań: 
$$\begin{cases} a = -3p - 9 \\ b = 3p^2 + 18p + 18 \\ c = -p^3 - 9p^2 - 18p \end{cases}$$

albo

- wielomian  $W$  w postaci iloczynu:  $W(x) = (x-1)(x^2 + (a+1)x + a+b+1)$

albo

- zapisze, że z równości  $1 + a + b + c = 0$  wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W$

albo

- zapisze układ czterech równań z 4 niewiadomymi, np.

$$\begin{cases} p + p + 3 + p + 6 = -a \\ p \cdot (p+3) + p \cdot (p+6) + (p+3) \cdot (p+6) = b \\ p \cdot (p+3) \cdot (p+6) = -c \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 4 p.**

Zdający

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równania  $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$ : 1, -2, -5

albo

- zauważy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W$  i zapisze trzy ciągi arytmetyczne o różnicy 3, których jednym z wyrazów jest liczba 1:  
(1, 4, 7), (-2, 1, 4), (-5, -2, 1)

albo

- zauważy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W$  i zapisze jeden ciąg arytmetyczny o różnicy 3, w którym jednym z wyrazów jest liczba 1:  
np. (1, 4, 7) lub (-2, 1, 4), lub (-5, -2, 1) i dla tego ciągu obliczy współczynniki  $a, b, c$  wielomianu, to otrzymuje **4 punkty**.

**Uwagi:**

- Jeżeli zdający wyznaczy jeden z pierwiastków wielomianu  $W$  i wykorzystuje informację, że pierwiastki wielomianu są **kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego**, to otrzymuje **3 punkty**.
- Jeżeli zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.  $p^3 + 6p^2 + 3p - 10 = 0$ , to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają lub poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 p.**

Zdający

- rozwiąże zadanie do końca, popełniając błędy rachunkowe

albo

- zapisze, że z równości  $1 + a + b + c = 0$  wynika, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W$ , zapisze trzy ciągi arytmetyczne o różnicy 3, których jednym z wyrazów jest liczba 1: (1, 4, 7), (-2, 1, 4), (-5, -2, 1) oraz zapisze, że  
 $W(x) = (x-1)(x-4)(x-7)$  lub  $W(x) = (x+2)(x-1)(x-4)$ ,  
lub  $W(x) = (x+5)(x+2)(x-1)$ .

albo

- wyznaczy współczynniki  $a, b, c$  wielomianu tylko dla dwóch ciągów

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający wyznaczy współczynniki wielomianu  $W$ : ( $a = -12, b = 39, c = -28$ ) lub ( $a = -3, b = -6, c = 8$ ), lub ( $a = 6, b = 3, c = -10$ ).

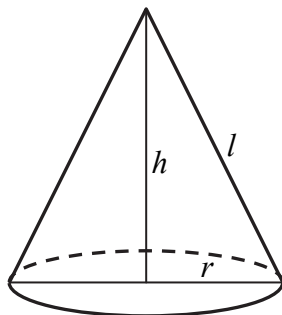
**Zadanie 16. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).
--------------------------------	--

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość stożka wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego obwód jest równy 20, więc

$$2r + 2l = 20,$$

$$r + l = 10,$$

$$l = 10 - r.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2,$$

$$r^2 = l^2 - h^2,$$

$$r^2 = (10 - r)^2 - h^2,$$

$$h^2 = 100 - 20r.$$

Zatem  $h = \sqrt{100 - 20r}$ .

Z geometrycznych warunków zadania otrzymujemy  $0 < r < 5$ .

Zapisujemy objętość stożka w zależności od zmiennej  $r$

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r},$$

Wzór tej funkcji zapiszemy w postaci  $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \sqrt{100r^4 - 20r^5}$  dla  $0 < r < 5$ .

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem  $f(r) = 100r^4 - 20r^5$  dla  $0 < r < 5$ .

Z faktu, że funkcja  $g(t) = \sqrt{t}$  jest rosnąca w  $\langle 0, +\infty \rangle$  wynika, że funkcje  $V$  oraz  $f$  są rosnące (malejące) w tych samych przedziałach oraz mają ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) dla tych samych argumentów.

Wyznaczamy wartość największą funkcji  $f$  w przedziale  $(0, 5)$ .

Obliczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(r) = 400r^3 - 100r^4$$

W przedziale  $(0, 5)$  pochodna ma jedno miejsce zerowe  $r = 4$ . Ponadto

$$f'(r) > 0 \text{ dla } r \in (0, 4),$$

$$f'(r) < 0 \text{ dla } r \in (4, 5).$$

Wynika stąd, że dla  $x = 4$  funkcja  $f$  ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością funkcji  $V$ , bo w przedziale  $(0, 4)$  funkcja  $f$  jest rosnąca, a przedziale  $\langle 4, 0 \rangle$  funkcja  $f$  jest malejąca.

Gdy  $r = 4$ , to  $h = \sqrt{100 - 20 \cdot 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ , natomiast objętość stożka jest wówczas równa:

$$V(4) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \sqrt{100 - 20 \cdot 4} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Odp.: Największą objętość równą  $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$  ma stożek o promieniu podstawy 4 i wysokości  $2\sqrt{5}$ .

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- oznaczenia promienia podstawy stożka, np.  $r$  i wyznaczenia wysokości stożka w zależności od zmiennej  $r$ :  $h = \sqrt{100 - 20r}$ .
- zapisania objętości  $V$  stożka jako funkcji jednej zmiennej  $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r}$ ,
- zapisania dziedziny funkcji  $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{100 - 20r}$ :  $0 < r < 5$ .

Za drugą część tego etapu zdający może otrzymać punkt, o ile pierwszą część wykona bezbłędnie. Punkt za część trzecią otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu.

**Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenia wzoru pochodnej funkcji  $f(r) = 100r^4 - 20r^5$ :  $f'(r) = 400r^3 - 100r^4$ ,
- obliczenia miejsc zerowych pochodnej:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 4$ ,
- zbadania znaku pochodnej funkcji  $f$ :  $f'(r) > 0$  dla  $r \in (0, 4)$ ,  $f'(r) < 0$  dla  $r \in (4, 5)$  i zapisania, że dla  $r = 4$  funkcja  $V$  osiąga największą wartość.

### **Uwagi:**

1. Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.

2. Jeśli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji  $V$  lub określi funkcję  $f$  na zbiorze szerszym od dziedziny funkcji  $V$ , to punkt za tę część może otrzymać jedynie wtedy, gdy wskazuje jako największą wartość funkcji tylko to maksimum, które funkcja  $f$  osiąga dla argumentu z dziedziny funkcji  $V$ .

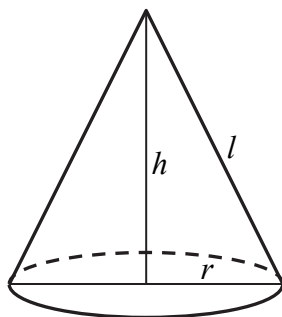
Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

### Trzeci etap

Zapisać, że promień stożka o największej objętości jest równy  $r=4$ , wysokość  $h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  i obliczenie największej objętości stożka  $V(4) = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ . Za realizację tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Objętość stożka wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym, którego obwód jest równy 20, więc

$$2r + 2l = 20,$$

$$r + l = 10,$$

$$l = 10 - r.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2,$$

$$r^2 = l^2 - h^2,$$

$$r^2 = (10 - r)^2 - h^2,$$

$$h^2 = 100 - 20r.$$

$$\text{Zatem } r = \frac{100 - h^2}{20} = 5 - \frac{1}{20}h^2.$$

Z geometrycznych warunków zadania otrzymujemy  $0 < h < 10$ . Zapisujemy objętość stożka w zależności od zmiennej  $h$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( 5 - \frac{1}{20}h^2 \right)^2 h,$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( 25 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{400}h^4 \right) \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \left( 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right) \text{ dla } 0 < h < 10.$$

Zauważamy, że wystarczy zbadać funkcję  $f(h) = 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5$  określoną w przedziale  $(0, 10)$ . Funkcje  $V$  oraz  $f$  są rosnące (malejące) w tych samych przedziałach oraz mają ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) dla tych samych argumentów. Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(h) = 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4.$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$\begin{aligned} 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4 &= 0 \text{ i } t = h^2 \\ \frac{1}{80}t^2 - \frac{3}{2}t + 25 &= 0 \\ \Delta &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{80} \cdot 25 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 \\ t_1 &= \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 \cdot \frac{1}{80}} = 20, \quad t_2 = \frac{\frac{3}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{80}} = 100 \\ h^2 &= 20 \text{ lub } h^2 = 100, \\ h &= -2\sqrt{5}, h = 2\sqrt{5}, h = -10, h = 10. \end{aligned}$$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej funkcji  $f$ , które należy do przedziału  $(0, 10)$  jest  $h = 2\sqrt{5}$ .

Ponadto:

$$f'(h) > 0 \text{ gdy } h \in (0, 2\sqrt{5}),$$

$$f'(h) < 0 \text{ gdy } h \in (2\sqrt{5}, 10).$$

Stąd wynika, że dla  $h = 2\sqrt{5}$  funkcja  $f$  osiąga maksimum lokalne i jest to jednocześnie wartość największa, bo w przedziale  $(0, 2\sqrt{5})$  funkcja  $f$  jest rosnąca, a przedziale  $(2\sqrt{5}, 10)$  funkcja  $f$  jest malejąca.

Gdy  $h = 2\sqrt{5}$ , to  $r = 5 - \frac{1}{20}(2\sqrt{5})^2 = 4$  i objętość stożka jest wówczas równa:

$$V(2\sqrt{5}) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Odp.: Największą objętość równą  $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$  ma stożek, którego promień jest równy 4, a wysokość  $2\sqrt{5}$ .

## Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- oznaczenia wysokości stożka, np.  $h$  i wyznaczenia promienia podstawy stożka

$$\text{w zależności od zmiennej } h: r = \frac{100-h^2}{20} = 5 - \frac{1}{20}h^2,$$

- zapisania objętości  $V$  stożka jako funkcji jednej zmiennej

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left( 25 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{400}h^4 \right) \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \left( 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right),$$

- zapisania dziedziny funkcji  $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left( 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5 \right)$ :  $0 < h < 10$ .

Za drugą część tego etapu zdający może otrzymać punkt, o ile pierwszą część wykona bezbłędnie. Punkt za część trzecią otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu.

**Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenia wzoru pochodnej funkcji  $f(h) = 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5$ :

$$f'(h) = 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4,$$

- obliczenia miejsc zerowych pochodnej:  $h = -2\sqrt{5}$ ,  $h = 2\sqrt{5}$ ,  $h = -10$ ,  $h = 10$ ,
- zbadania znaku pochodnej funkcji  $f$ :  $f'(h) > 0$  dla  $h \in (0, 2\sqrt{5})$ ,  $f'(h) < 0$  dla  $h \in (2\sqrt{5}, 10)$  i zapisania, że dla  $h = 2\sqrt{5}$  funkcja  $V$  osiąga największą wartość.

**Uwagi:**

1. Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.
2. Jeśli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji  $V$  lub określi funkcję  $f$  na zbiorze szerszym od dziedziny funkcji  $V$ , to punkt za tę część może otrzymać jedynie wtedy, gdy wskazuje jako największą wartość funkcji tylko to maksimum, które funkcja  $f$  osiąga dla argumentu z dziedziny funkcji  $V$ , przy czym konieczne jest uzasadnienie, że jest to największa wartość funkcji  $V$  lub że funkcja  $V$  nie przyjmuje wartości dla liczb większych od 10.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

**Trzeci etap**

Zapisanie, że promień stożka o największej objętości jest równy  $r = 4$ , wysokość

$h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  i obliczenie największej objętości stożka  $V(4) = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ . Za realizację tego

etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.