CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-660, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00
Termin egzaminu:	11 maja 2026 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.3R) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3R) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8R) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.2R) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1R) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

8	2	8

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{28}$.

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, np. $|\Omega| = 8!$ oraz $|A| = 2 \cdot 6!$.

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, np. $|\Omega| = 8!$
ALBO
– zapisanie, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A, musi być liczba podzielna przez 3,
ALBO
– wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, np. $|A| = 2 \cdot 6!$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A, musi być liczba podzielna przez 3, ale – obliczając liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A – zapisze $|A| = 6!$ (lub $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6!$) oraz rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze $|\Omega| = \binom{8}{2}$ (lub $|\Omega| = 8 \cdot 7$) bez stosownego komentarza i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jest to model klasyczny. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Wówczas $|\Omega| = 8!$.

Iloczyn trzech liczb całkowitych jest podzielny przez 3, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez 3. Wobec tego, aby iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu był liczbą podzielną przez 3, to jeden z tych trzech wyrazów musi być liczbą podzielną przez 3.

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ są dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6.

Niech ciąg $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ będzie zdarzeniem elementarnym, które sprzyja zdarzeniu A. W tym ciągu liczbowym znajdują się dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6. Zatem jedna z tych liczb znajduje się wśród wyrazów a_1, a_2, a_3 (gdyż iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ jest podzielny przez 3), a druga z nich znajduje się wśród wyrazów a_6, a_7, a_8 (gdyż iloczyn $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$ jest podzielny przez 3), więc wyrazy a_4 oraz a_5 nie są podzielne przez 3. Stąd i z tego, że iloczyny $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ oraz $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ są podzielne przez 3, wynika, że wyrazy a_3 oraz a_6 muszą być podzielne przez 3, tj. $\{a_3, a_6\} = \{3, 6\}$.

Jeżeli zdarzenie elementarne jest ciągiem, w którym trzecim i szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6, to iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów takiego ciągu jest liczbą podzielną przez 3. Zatem takie zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A.

Dlatego zdarzeniu A sprzyjają jedynie zdarzenia elementarne będące ciągami, których trzecim oraz szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa $|A| = 2 \cdot 6!$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

Zadanie 7. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1R) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.:

- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) i zapisanie, że kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny

  ALBO

- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) **oraz** uzasadnienie, że dla liczb dodatnich x, y nierówność $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub nierówność $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) jest prawdziwa,

  ALBO

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f **oraz** uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $x=y$ i obliczenie $f(y)$.

2 pkt – przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $x^2-2xy+y^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y^2} \geq 0$)

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$),

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f: $x=y$.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $W(x,y) \geq 0$ (lub do postaci $\frac{W(x,y)}{x^2y^2} \geq 0$), gdzie W jest wielomianem zmiennych x oraz y, np.:

$x^3+y^3-xy^2-x^2y \geq 0$, $x^3+y^3-xy(x+y) \geq 0$, $\frac{x^3+y^3-xy^2-x^2y}{x^2y^2} \geq 0$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq \frac{x+y}{xy}$,

ALBO

– rozważenie funkcji $f(x)=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej x z parametrem $y>0$ **oraz** wyznaczenie pochodnej tej funkcji, np. $f'(x)=\frac{1}{y^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{1}{x^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości x i y, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przekształci nierówność do postaci $(x^2-y^2)(x-y)\geq 0$, a następnie uzasadni prawdziwość tej nierówności w przypadku, gdy $x>y$ oraz w przypadku, gdy $x<y$, a pominie przypadek $x=y$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (suma sześcianów)

Z założenia $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2y^2>0$. Mnożymy obie strony nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ przez x^2y^2 i otrzymujemy

$$xy^2+yx^2\leq x^3+y^3$$

Stosujemy wzór na sumę sześcianów oraz kwadrat różnicy i dostajemy:

$$xy(x+y)\leq(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$0\leq(x+y)(x^2-2xy+y^2)$$

$$0\leq(x+y)(x-y)^2$$

Ponieważ $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y, a ponadto $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$, więc $(x+y)(x-y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność $0\leq(x+y)(x-y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób II (grupowanie)

Z założenia $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2y^2>0$. Mnożymy obie strony nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ przez x^2y^2 oraz stosujemy wzór na różnicę kwadratów i otrzymujemy kolejno:

$$xy^2+yx^2\leq x^3+y^3$$

$$0\leq x^3-xy^2+y^3-yx^2$$

$$0\leq x(x^2-y^2)+y(y^2-x^2)$$

$$0 \leq (x-y)(x^2-y^2)$$

$$0 \leq (x-y)^2(x+y)$$

Ponieważ $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y, a ponadto $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$, więc $(x+y)(x-y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność $0 \leq (x+y)(x-y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób III

Z założenia wynika, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, więc przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$, rozszerzając odpowiednie ułamki i stosując wzór na różnicę kwadratów:

$$0 \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

$$0 \leq \frac{x^3}{x^2y^2}+\frac{y^3}{x^2y^2}-\frac{y^2x}{x^2y^2}-\frac{x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x^3+y^3-y^2x-x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x(x^2-y^2)+y(y^2-x^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$$

Ponieważ:

- $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich x oraz y
- $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$
- x^2y^2 jest dodatnie jako iloczyn kwadratów liczb dodatnich x oraz y,

więc $\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$ jest nieujemne jako iloraz liczby nieujemnej $(x-y)^2(x+y)$ i liczby dodatniej x^2y^2. Zatem nierówność $0 \leq \frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej x i każdej liczby dodatniej y nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

Sposób IV (badanie funkcji)

Rozważmy funkcję $f(x)=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej x z parametrem $y>0$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{1}{y^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-2y^3+xy^2}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-y^3+xy^2-y^3}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)+y^2(x-y)}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-y)(x^2+xy+2y^2)}{x^3y^2}$$

Ponieważ $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2+xy+2y^2>0$ i $x^3y^2>0$. Zatem:

- $f'(x)=0$ tylko dla $x=y$
- $f'(x)>0$ w przedziale $(y,+\infty)$
- $f'(x)<0$ w przedziale $(0,y)$.

Stąd funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,y]$ i jest rosnąca w przedziale $[y,+\infty)$. Zatem funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $x=y$. Ponieważ $f(y)=\frac{y}{y^2}+\frac{y}{y^2}-\frac{1}{y}-\frac{1}{y}=0$, więc

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\geq 0$$

czyli

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$$

dla każdej liczby dodatniej x i dla każdej liczby dodatniej y.
To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.4R) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – uzasadnienie, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe) i przedstawienie kompletnego rozumowania prowadzącego do wyznaczenia poprawnego równania z niewiadomą $|PQ|$ oraz zapisanie tego równania

ALBO

– przyjęcie bez uzasadnienia, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe) **oraz** przeprowadzenie pełnego rozumowania przy tym założeniu i otrzymanie tezy $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu Q: $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

1 pkt – uzasadnienie, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe)

ALBO

– obliczenie długości boku KM trójkąta DKM i długości jednego z pozostałych dwóch boków tego trójkąta: $|KM| = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, $|DK| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|DM| = \frac{5}{4}a$,

ALBO

– obliczenie długości jednego z odcinków AP, DP lub PK: $|AP| = \frac{1}{\sqrt{5}}a$, $|DP| = \frac{2}{\sqrt{5}}a$, $|PK| = \frac{1}{2\sqrt{5}}a$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu P: $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$,

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty EKD i MKD są przystające.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmie błędne założenie (np. że miara kąta AKD jest równa $60°$) i na tym opiera swoje rozumowanie, to otrzymuje **0 punktów**.

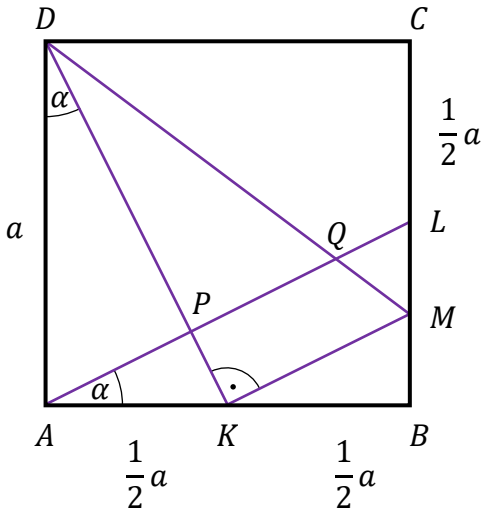
2. Jeżeli zdający uzasadni, że odcinki AL i DK są prostopadłe (lub AL i KM są równoległe), a w dalszej części rozwiązania popełni tylko jeden błąd rachunkowy, ale zrealizuje w pełni strategię rozwiązania zadania, otrzymując równanie z jedną niewiadomą $|PQ|$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy miarę kąta ADK przez α. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.



Stąd wynika, że miary kątów ostrych trójkąta APK są równe miarom odpowiednich kątów ostrych trójkątów DAK i ABL. To oznacza, że trójkąt APK jest prostokątny i podobny do trójkątów DAK oraz DPA, więc

$$\frac{|AD|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|PK|} = \frac{|DP|}{|AP|} = 2$$

Stąd $|DP| = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot (2 \cdot |PK|) = 4 \cdot |PK|$.

Kąt DKM jest prosty i $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle PDQ|$, więc trójkąty prostokątne DKM oraz DPQ są podobne, a skala podobieństwa jest równa

$$\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{|DP| + |PK|}{|DP|} = \frac{5 \cdot |PK|}{4 \cdot |PK|} = \frac{5}{4}$$

Zatem $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM|$, a ponieważ trójkąt KBM jest podobny do trójkąta ABL w skali $1 : 2$, więc

$$|KM| = \frac{1}{2} \cdot |AL| = \frac{1}{2} \cdot |DK| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$$

i tym samym

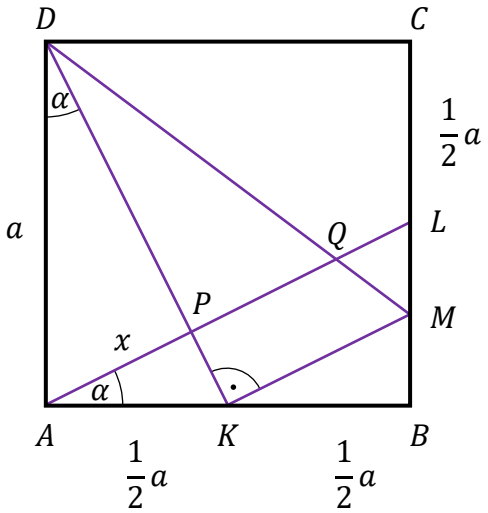
$$|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM| = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Sposób II

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.



Kąty DAP oraz ALB są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90° - \alpha$. Zatem trójkąt DPA jest prostokątny i podobny do trójkąta DAK. Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DAP otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt DPA jest prosty, więc $AL \parallel KM$. Zatem trójkąty prostokątne DKM i DPQ oraz ADK i BKM są podobne. Skala podobieństwa trójkątów ADK i BKM jest równa $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$, więc $|DK| = 2 \cdot |KM|$. Stąd z kolei wynika, że trójkąt DKM jest podobny do trójkąta DAK, więc jest również podobny do trójkąta DPA. Zatem $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle ADP| = \alpha$. Wobec tego trójkąty prostokątne DPA i DPQ są przystające (cecha kbk). Stąd

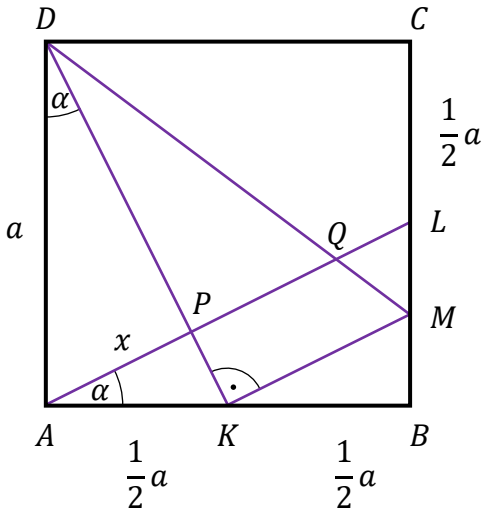
$$|PQ| = |AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Sposób III

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.



Kąty DAP oraz ALB są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90° - \alpha$. Zatem trójkąt DPA jest prostokątny i podobny do trójkąta DAK. Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DAP otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt DPA jest prosty, więc $AL \parallel KM$. To oznacza, że $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BAL|$, więc trójkąty prostokątne ADK i BKM są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$. Stąd $|MB| = \frac{1}{2} \cdot |AK| = \frac{1}{4}a$ oraz $|LM| = |BL| - |MB| = \frac{1}{4}a$.

Ponieważ $AD \parallel BC$, więc kąty naprzemianległe ADQ i QML mają równe miary. Z tej samej przyczyny kąty naprzemianległe QAD i QLM mają równe miary. Zatem trójkąty AQD i LQM są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|LM|} = \frac{a}{\frac{1}{4}a} = 4$. Stąd

$$|LQ| = \frac{1}{4} \cdot (|AP| + |PQ|) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ|\right)$$

Ale $|LQ| + |AP| + |PQ| = |AL| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, więc

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a+|PQ|\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}a+|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}a+\frac{5}{4}\cdot|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

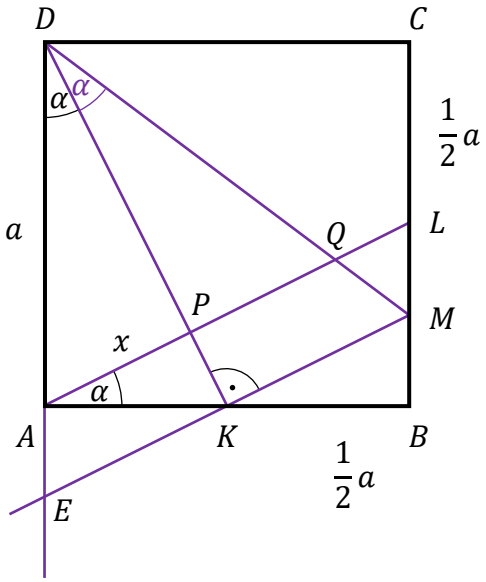
To należało wykazać.

Sposób IV

Oznaczmy przez E punkt przecięcia prostych AD i KM. Niech $x=|AP|$ oraz $\alpha=|\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA|=90^\circ-\alpha$.

Ponieważ $|AK|=|BK|=\frac{a}{2}$ i kąty KAE oraz KBM są proste, a kąty AKE i BKM mają równe miary (gdyż są to kąty wierzchołkowe), więc trójkąty AKE i BKM są przystające (cecha kbk). Stąd mamy $|EK|=|KM|$, więc trójkąty prostokątne DKE i DKM są przystające (cecha bkb). Wobec tego $|\sphericalangle KDM|=|\sphericalangle KDE|=\alpha$.

Ponieważ $|DA|=|AB|=a$, $|AK|=|BL|=\frac{a}{2}$ i kąty DAK oraz ABL są proste, więc trójkąty DAK i ABL są przystające. Zatem $|\sphericalangle BAL|=|\sphericalangle ADK|=\alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB|=|\sphericalangle DKA|=90^\circ-\alpha$.



Kąty DAP oraz ALB są naprzemianległe i $AD\parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP|=|\sphericalangle ALB|=90^\circ-\alpha$, czyli kąt DPA jest prosty. Stąd $EM\parallel AL$, co oznacza, że trójkąty APD i QPD są przystające (cecha kbk) i wobec tego $|PQ|=|AP|=x$.

Trójkąty DPA i DAK mają kąty o miarach α, $90^\circ-\alpha$ i 90°, więc są podobne (cecha kkk). Dlatego $\frac{|DP|}{|AD|}=\frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP|=\frac{|AD|}{|AK|}\cdot|AP|=2\cdot|AP|=2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DAP otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

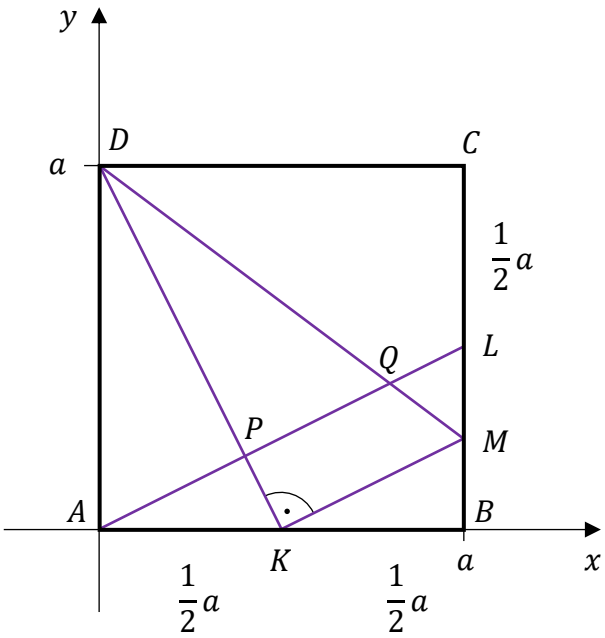
$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Sposób V (analitycznie)

Umieszczamy kwadrat $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$ (zobacz rysunek).



Wówczas $K = \left(\frac{1}{2}a, 0\right)$ oraz $L = \left(a, \frac{1}{2}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej DK:

$$y = \frac{0 - a}{\frac{1}{2}a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -2x + a$$

Wyznaczamy równanie prostej AL:

$$y = \frac{\frac{1}{2}a - 0}{a - 0} \cdot x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Wyznaczamy współrzędne punktu P:

$$\frac{1}{2}x = -2x + a$$

$$x = \frac{2}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a = \frac{1}{5}a$$

Zatem $P = \left(\frac{2}{5}a,\ \frac{1}{5}a\right)$.

Prosta KM jest prostopadła do prostej DK, więc współczynnik kierunkowy w równaniu prostej KM jest równy $\frac{1}{2}$. Zatem prosta KM ma równanie $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}a\right)$. Stąd druga współrzędna punktu M jest równa $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a$, czyli $M = \left(a,\ \frac{1}{4}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej DM:

$$y = \frac{\frac{1}{4}a - a}{a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -\frac{3}{4}x + a$$

Obliczamy współrzędne punktu Q, korzystając z równań prostych AL i DM:

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + a$$

$$x = \frac{4}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a$$

Zatem $Q = \left(\frac{4}{5}a,\ \frac{2}{5}a\right)$.

Obliczamy długość odcinka PQ:

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(-1\,026\,168)$.

3 pkt – obliczenie liczby n wyrazów ciągu arytmetycznego: $n = 1014$.

2 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą r: $r = 0$ oraz $r = -2$

ALBO

– obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającej warunki zadania: $r = -2$,

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą q: $q = 1$ oraz $q = 3$,

ALBO

– obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego (a_2, a_3, a_6) spełniającego warunki zadania: $q = 3$,

ALBO

– obliczenie/zapisanie, że ciąg (a_2, a_3, a_6) nie jest stały i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą a_2: $a_2 = -1$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą n, np.

$$\left(1 + 2 \cdot \frac{-2026}{n - 1}\right)^2 = \left(1 + \frac{-2026}{n - 1}\right)\left(1 + 5 \cdot \frac{-2026}{n - 1}\right)$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np. $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q, np. $3q - 3 = q^2 - q$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2, np. $a_2 = 1 + 2a_2$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– wyznaczenie różnicy ciągu (a_n) w zależności od liczby n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n): $r = \frac{-2026}{n-1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z ciągiem geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający stosuje błędny wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma wartość n, która nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (traktujemy to jak obliczenie liczby wyrazów ciągu arytmetycznego z błędem rachunkowym). Zdający nie otrzymuje punktu za obliczenie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego.

4. a) Jeżeli zdający przyjmie, że $r = -2$ i sprawdzi rachunkiem, że ta wartość spełnia warunki zadania, ale nie uzasadni, że jest to jedyna wartość r spełniająca warunki zadania, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie n oraz za obliczenie sumy).

b) Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że $r = -2$ i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n). Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_2 = 1 + r$, $a_3 = 1 + 2r$, $a_6 = 1 + 5r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$$

$$0 = 2r + r^2$$

$$0 = r(2 + r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) nie są równe.

Dla $r = -2$ otrzymujemy $a_2 = -1$, $a_3 = -3$, $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n):

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n):

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Sposób II

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n). Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_2, a_3, a_6). Ciąg arytmetyczny (a_n) jest malejący, więc ciąg (a_2, a_3, a_6) nie jest stały. Zatem $q \neq 1$ oraz $a_2 \neq 0$. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego i własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 \cdot q$, $a_6 = a_2 \cdot q^2$ oraz $3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$$

$$3a_2 \cdot q - 3a_2 = a_2 \cdot q^2 - a_2 \cdot q$$

$$0 = a_2 \cdot (q^2 - 4q + 3)$$

$$a_2 = 0 \quad \vee \quad q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$a_2 = 0 \quad \vee \quad q = 1 \quad \vee \quad q = 3$$

Dla $a_2 = 0$ oraz dla $q = 1$ warunki zadania nie są spełnione, czyli $q = 3$. Zatem $a_3 = 3a_2$, $a_6 = 9a_2$.
Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i obliczamy a_2:

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$$

$$\frac{1 + 3a_2}{2} = a_2$$

$$a_2 = -1$$

Ponieważ $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$, więc różnica ciągu arytmetycznego jest równa (-2).
Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n):

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n):

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Sposób III

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego (a_n). Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 + r$, $a_6 = a_2 + 4r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(a_2 + r)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 4r)$$

$$a_2^2 + 2a_2 r + r^2 = a_2^2 + 4a_2 r$$

$$0 = r(2a_2 - r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = 2a_2$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) nie są równe.
Dla $r = 2a_2$ otrzymujemy $a_2 = 1 + 2a_2$. Stąd $a_2 = -1$, więc $r = -2$. Zatem $a_3 = -3$ oraz $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę n wyrazów ciągu (a_n):

$$-2025 = 1 + (n-1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę S_{1014} wszystkich wyrazów ciągu (a_n):

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

Zadanie 10. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik, np.: $\frac{\pi k}{2}$ oraz $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy, np.:

- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos^2(2x)=\frac{3}{4})$ oraz
  $x=\frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\sin(2x)=0$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2})$ oraz
  $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k$ oraz $x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$ (rozwiązania równania $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos(4x)=\frac{1}{2})$ oraz
  $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ oraz $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\cos(4x)=\frac{1}{2}$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$ lub $\sin(2x)=\frac{1}{2})$ oraz
  $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$ oraz $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k$ (rozwiązania równania $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$),

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.:
$\sin(2x)=0$ lub $\cos^2(2x)=\frac{3}{4}$,
$\sin(2x)=0$ lub $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin(2x)=0$ lub $2\cos(4x)-1=0$,
$\sin(2x)=0$ lub $4\sin^2(2x)-1=0$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus sumy i przekształcenie równania do postaci $\sin(4x)\cos(2x)+\cos(4x)\sin(2x)-2\sin(2x)=0$ (dla *sposobu I*)
ALBO
– zastosowanie wzoru na różnicę sinusów i przekształcenie równania do postaci $2\cos(4x)\sin(2x)-\sin(2x)=0$ (dla *sposobu II*),
ALBO
– zastosowanie wzoru na sinus potrojonego kąta i przekształcenie równania do postaci $-4\sin^3(2x)+3\sin(2x)-2\sin(2x)=0$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. a) Jeżeli zdający popełni błędy, które nie są rachunkowe, nie zrealizuje wymagań z kryterium za 1 punkt, przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za rozwiązanie równania $\sin(2x)=0$).

b) Jeżeli zdający zrealizuje wymagania z kryterium za 1 punkt, a następnie popełni błędy, które nie są rachunkowe, przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$ i rozwiąże równanie $\sin(2x)=0$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełni tylko błędy rachunkowe i przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$, gdzie funkcja trygonometryczna f nie ma miejsc zerowych lub równanie trygonometryczne $f(x)=0$ ma jedną serię rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, oraz rozwiąże równanie $\sin(2x)=0$, otrzymując $x=\frac{\pi k}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

3. Jeżeli zdający przyjmie $u=2x$ i rozwiąże równanie $\sin(3u)-2\sin u=0$ (lub równanie $-4\sin^3 u+3\sin u-2\sin u=0$) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus sumy)

Przekształcamy równanie $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ równoważnie, stosując wzór na sinus sumy kątów i cosinus podwojonego kąta:

$$\sin(4x+2x)-2\sin(2x)=0$$

$$\sin(4x)\cos(2x)+\cos(4x)\sin(2x)-2\sin(2x)=0$$

$$2\sin(2x)\cos^2(2x)+[2\cos^2(2x)-1]\sin(2x)-2\sin(2x)=0$$

$$\sin(2x)\,[4\cos^2(2x)-3]=0$$

$$\sin(2x)=0 \quad \vee \quad \cos^2(2x)=\frac{3}{4}$$

$$\sin(2x)=0 \quad \vee \quad \cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x)=0$:

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \quad \vee \quad 2x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $-\frac{\pi}{12} + \pi k$ oraz $\frac{\pi}{12} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II (poprzez różnicę sinusów)

Przekształcamy równanie $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na różnicę sinusów:

$$\sin(6x) - \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$2\cos\left(\frac{6x + 2x}{2}\right)\sin\left(\frac{6x - 2x}{2}\right) - \sin(2x) = 0$$

$$2\cos(4x)\sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x)\,[2\cos(4x) - 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \vee \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób III (poprzez sinus potrojonego kąta)

Przekształcamy równanie $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus potrojonego kąta:

$$\sin(3 \cdot 2x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$-4\sin^3(2x) + 3\sin(2x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x)\,[-4\sin^2(2x) + 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin^2(2x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin(2x) = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $\frac{7\pi}{12} + \pi k$ oraz $\frac{11\pi}{12} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = 3\sqrt{6}$ oraz $\cos\beta = \frac{5}{14}$.

3 pkt – obliczenie wysokości x ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa:
$x = \sqrt{42}$
ALBO
– obliczenie $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$: $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$,
ALBO
– obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 3\sqrt{6}$ **oraz** zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β, np.
$1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1-\cos\beta)$, $1 = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}$,
ALBO
– obliczenie cosinusa kąta β: $\cos\beta = \frac{5}{14}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$: $a = 3\sqrt{6}$ oraz $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$
ALBO
– zapisanie związków $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ oraz $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|EB|}{x}$,
ALBO
– obliczenie długości (lub kwadratu długości) b krawędzi bocznej ostrosłupa: $b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (lub $b^2 = \frac{243}{4}$),
ALBO
– zapisanie zależności między długością krawędzi bocznej ostrosłupa i wysokością ściany bocznej opuszczoną na krawędź boczną ostrosłupa, np.: $\frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$,
$\frac{1}{2}\cdot b^2\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{1}{2}b\cdot x$, $\left(\frac{5}{9}b\right)^2 + x^2 = b^2$,
ALBO
– zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β, np.
$1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1-\cos\beta)$, $1 = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}$.

1 pkt – obliczenie długości a krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 3\sqrt{6}$
ALBO

– obliczenie $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}$,

ALBO

– obliczenie $\sin\alpha$: $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{14}}{9}$,

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABD i zapisanie równania

$$a^2=x^2+x^2-2x^2\cos\beta$$

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCS i zapisanie równania

$$a^2=b^2+b^2-2b^2\cos\alpha$$

ALBO

– zapisanie zależności między a, x oraz α, np. $\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{x}{a}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{a}$,

ALBO

– zapisanie zależności między b, x oraz α, np. $\sin\alpha=\frac{x}{b}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do ściany bocznej – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub długości krawędzi bocznej – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika piątego z kategorii za **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do trójkąta z tym kątem – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub wysokości ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka podstawy ostrosłupa – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika czwartego z kategorii za **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę niż ostrosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

S – wierzchołek ostrosłupa,

D – punkt wspólny wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B i wysokości ściany bocznej ACS poprowadzonej z wierzchołka A,

E, F – środki krawędzi – odpowiednio – AB i BC,

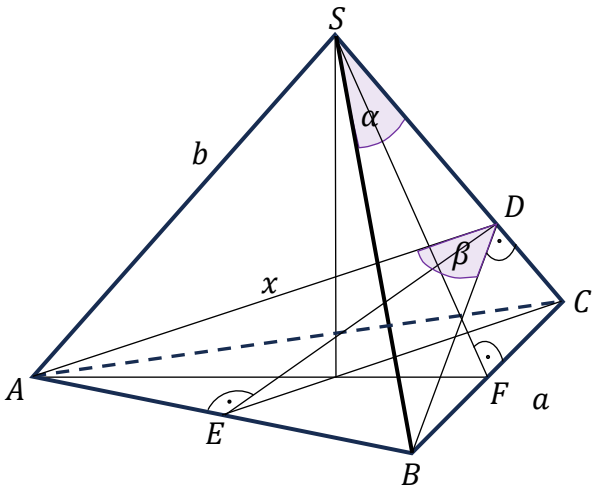
α – miara kąta BSC,

β – miara kąta dwuściennego zawartego między ścianami bocznymi BCS i ACS ostrosłupa $ABCS$,

a – długość krawędzi podstawy ABC,

b – długość krawędzi bocznej,

x – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy ABC (zobacz rysunek).



Sposób I (z pominięciem krawędzi bocznej)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \vee \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha < 180°$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS| = 90° - \frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD| = \frac{\alpha}{2}$. Zatem:

$$\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i obliczamy $\cos\beta$:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{5}{14}$$

Sposób II (poprzez krawędź boczną)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCS i obliczamy długość krawędzi bocznej:

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$54 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{5}{9}$$

$$b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BFS i obliczamy wysokość SF ściany bocznej BCS:

$$|SF| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$|SF| = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów CDB oraz BFS i obliczamy długość BD:

$$\frac{x}{a}=\frac{|SF|}{b}$$

$$x=a\cdot\frac{|SF|}{b}$$

$$x=3\sqrt{6}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{21}}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i obliczamy $\cos\beta$:

$$a^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2=2\cdot 42-2\cdot 42\cos\beta$$

$$\cos\beta=\frac{5}{14}$$

Sposób III (poprzez $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$)

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC:

$$2\pi R=6\sqrt{2}\pi$$

$$R=3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{2}$$

$$a=3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos\alpha=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\frac{5}{9}=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}\quad\text{v}\quad\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha<180°$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS|=90°-\frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD|=\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{x}{a}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Stąd i ze związku $\frac{|EB|}{x}=\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ otrzymujemy:

$$\frac{|EB|}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

Obliczamy $\cos\beta$:

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos\beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2$$

$$\cos\beta = \frac{5}{14}$$

Sposób IV

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BDA i otrzymujemy:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$a^2 = 2x^2(1 - \cos\beta)$$

Z trójkąta prostokątnego BDS otrzymujemy $\frac{x}{b} = \sin\alpha$, więc $x = b \cdot \sin\alpha$ i dlatego

$$a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta)$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCS i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos\alpha)$$

Stąd i z zależności $a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta)$ otrzymujemy:

$$2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta) = 2b^2(1 - \cos\alpha)$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1}{1 + \cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{5}{9}}{1+\frac{5}{9}} = \frac{5}{14}$$

Obliczamy promień R okręgu opisanego na podstawie ABC:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt. 8.7R) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach.

Zasady oceniania (dla *sposobu I*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów C oraz M: $C=(2,1)$ oraz $M=\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu C oraz długości odcinka MC: $C=(2,1)$ oraz $|MC|=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C=(2,1)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C), **oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A oraz C, np. $6x_C+2\cdot\left(-\frac{1}{2}x_C+2\right)-14=0$ oraz $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu C), np. $6x_C+2\cdot\left(-\frac{1}{2}x_C+2\right)-14=0$, $6(4-2y_C)+2y_C-14=0$

ALBO

– wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku AB trójkąta **oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A oraz C, np.

$6x+2y-14=0$ oraz $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

1 pkt – wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku AB trójkąta, np. $6x+2y-14=0$

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu C w zależności od jednej zmiennej, np. $C=\left(x_C,-\frac{1}{2}x_C+2\right)$,

ALBO

– wyznaczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A oraz C, np. $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu $C = (2, 1)$ oraz uzasadni (np. rachunkowo), że ten punkt spełnia warunki zadania, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli zdający takiego uzasadnienia nie zapisze, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. a) Jeżeli zdający przyjmuje $|AM| : |MC| = 4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

b) Jeżeli zdający przyjmuje stosunek $|AM| : |MC|$ inny niż $1 : 4$ lub $4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że prosta AC jest prostopadła do prostej BC, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie współrzędnych punktu C w zależności od jednej zmiennej lub wyznaczenie/obliczenie współrzędnych punktu M w zależności od współrzędnych punktów A oraz C, oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie zadania do końca).

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu M oraz współrzędnych wektora $\overrightarrow{AM}$ (lub współrzędnych wektora $\overrightarrow{MC}$): $M=\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ oraz $\overrightarrow{AM}=\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$ (lub $\overrightarrow{MC}=\left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$).

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D **oraz** wyznaczenie równania prostej ME:
$D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ oraz np. $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right)-\frac{4}{5}$
ALBO
– obliczenie współrzędnych punktu E **oraz** wyznaczenie równania prostej MD:
$E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ oraz np. $y=-3\left(x-\frac{13}{10}\right)-\frac{9}{10}$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów D oraz E: $D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ oraz $E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
ALBO
– wyznaczenie równania prostej MD, np. $y=-3\left(x-\frac{13}{10}\right)-\frac{9}{10}$,
ALBO
– wyznaczenie równania prostej ME, np. $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right)-\frac{4}{5}$.

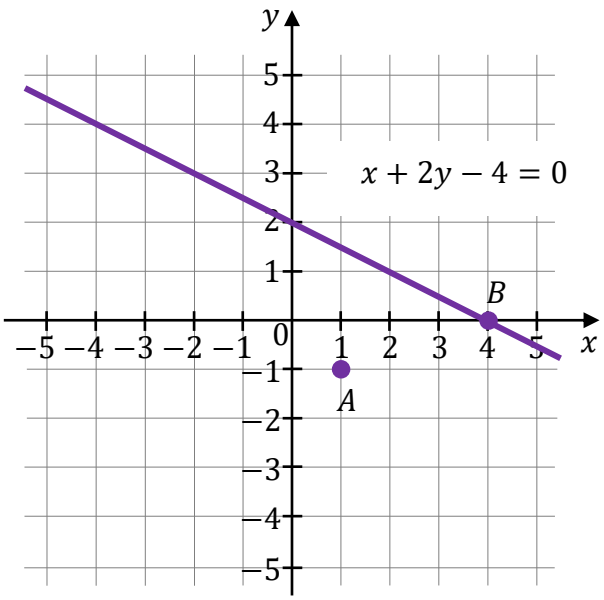
1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu D: $D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$
ALBO
– obliczenie współrzędnych punktu E: $E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że punkt A nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt B leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię BC trójkąta ABC.



Niech $C = (x_C, y_C)$. Wówczas $y_C = -\frac{1}{2}x_C + 2$. Ponieważ $|CA| = |CB|$, więc

$$|CA|^2 = |CB|^2$$

$$(1 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = (4 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2$$

$$1 - 2x_C + x_C^2 + 1 + 2y_C + y_C^2 = 16 - 8x_C + x_C^2 + y_C^2$$

$$6x_C + 2y_C - 14 = 0$$

$$6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$$

$$x_C = 2$$

Zatem $C = (2, 1)$.

Niech $M = (x_M, y_M)$. Z warunków zadania wynika, że $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$[x_M - 1, y_M - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [2 - 1, 1 - (-1)]$$

$$x_M - 1 = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad y_M + 1 = \frac{2}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M:

$$|MC|^2 = \left(2-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(1+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M, ma postać

$$\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Sposób II

Niech $D = (x_D, y_D)$ będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą, która jest prostopadła do AB i przechodzi przez punkt M.

Niech $E = (x_E, y_E)$ będzie punktem przecięcia prostej AB z prostą, która jest równoległa do BC i przechodzi przez punkt M.

Zauważmy, że punkt A nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt B leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię BC trójkąta ABC.

Z warunków zadania oraz twierdzenia Talesa otrzymujemy:

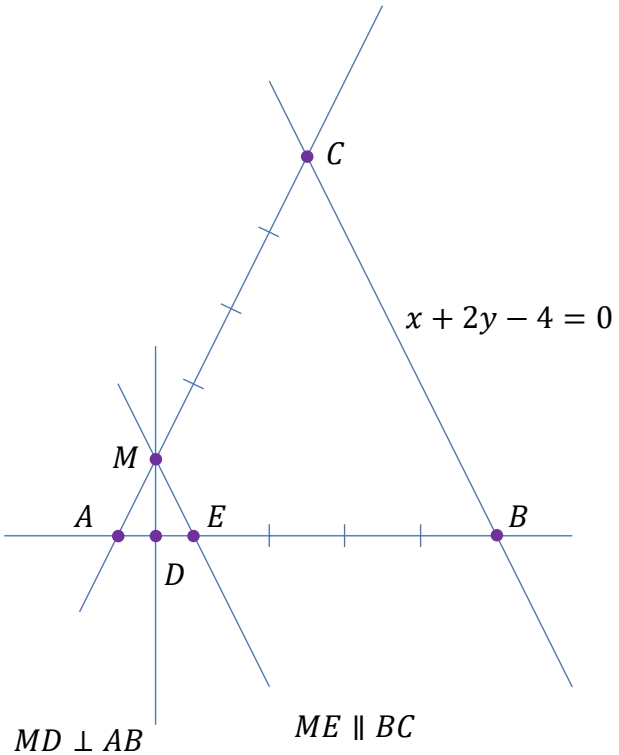
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_E - 1, y_E - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [4-1, 0-(-1)]$$

$$x_E - 1 = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad y_E + 1 = \frac{1}{5}$$

Stąd $E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Zatem prosta ME ma równanie $y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$, czyli $y = -\frac{1}{2}x$.



Ponieważ $ME \parallel BC$, więc trójkąt AME jest równoramienny i $|AM| = |ME|$. Stąd prosta MD jest symetralną odcinka AE. Zatem punkt D dzieli odcinek AB w stosunku $1:9$ (licząc od punktu A). Obliczamy współrzędne punktu D:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{10} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_D - 1, y_D - (-1)] = \frac{1}{10} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_D - 1 = \frac{3}{10} \quad \wedge \quad y_D + 1 = \frac{1}{10}$$

Stąd $D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$.

Współczynnik kierunkowy a_{AB} prostej AB jest równy $a_{AB} = \frac{0-(-1)}{4-1} = \frac{1}{3}$, więc prosta MD ma równanie $y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}$, czyli $y = -3x + 3$.

Obliczamy współrzędne punktu M:

$$-\frac{1}{2}x = -3x + 3$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Stąd $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Z warunków zadania

$$\overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \cdot \left[\frac{6}{5} - 1, -\frac{3}{5} - (-1)\right] = \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$$

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M:

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt C i ma środek w punkcie M, ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. 4.12) wykorzystuje własności funkcji kwadratowej liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania (dla *sposobu I*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie wszystkich warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$),
2) $p > -2$,
3) $p < 2$,
4) $f(-2) > 0$,
5) $f(2) > 0$,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$): $m \in (0, +\infty)$,
2) $p > -2$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,
3) $p < 2$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,
4) $f(-2) > 0$: $m \in \mathbb{R}$,
5) $f(2) > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków 1) – 5) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1,+\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

3 pkt – spełnienie czterech spośród warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$,

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$,

ALBO

– spełnienie warunków III) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

2 pkt – spełnienie warunku I) i jednego z warunków II) – V):

I) wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz wyznaczenie miejsc zerowych x_1 oraz x_2 funkcji f w zależności od m: $m \in (0,+\infty)$ i $x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m}$ oraz $x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$,

II) rozwiązanie nierówności $x_1 < 2$: $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$,

III) rozwiązanie nierówności $-2 < x_1$: $m \in (0, +\infty)$,

IV) rozwiązanie nierówności $x_2 < 2$: $m \in (1, +\infty)$,

V) rozwiązanie nierówności $-2 < x_2$: $m \in (0, +\infty)$,

ALBO

– spełnienie trzech spośród warunków II) – V).

1 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe: $m \in (0,+\infty)$

ALBO

– wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f w zależności od m: $x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m}$ oraz $x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków I) – V) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków I) – V) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania (dla *sposobu III*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$: $m \in (0, +\infty)$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \neq 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków A) – E) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez interpretację geometryczną)

Ponieważ $m \neq 0$, więc współczynnik przy x^2 jest dodatni. Zatem parabola, która jest wykresem funkcji f, ma ramiona skierowane ku górze.

Stąd funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy spełnione będą następujące warunki:

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$)

2) $p > -2$

3) $p < 2$

4) $f(-2) > 0$

5) $f(2) > 0$.

Rozwiązujemy warunek 1):

$$f(p) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) < 0$$

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2m \cdot \frac{1}{m} - m + 1 < 0$$

$$-m < 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Warunki 2) oraz 3) można rozwiązać za pomocą nierówności podwójnej:

$$p \in (-2, 2)$$

$$-2 < -\frac{-2m}{2m^2} < 2$$

$$-2 < \frac{1}{m} < 2$$

$$\frac{1}{|m|} < 2$$

$$|m| > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek 4):

$$f(-2) > 0$$

$$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - m + 1 > 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$$

$$m \in \mathbb{R}$$

Rozwiązujemy warunek 5):

$$f(2) > 0$$

$$m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0$$

$$4(m-1)\left(m - \frac{1}{4}\right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki 1) – 5) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

Sposób II (poprzez wyznaczenie miejsc zerowych)

Przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 , x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

I) $\Delta > 0$
II) $x_1 < 2$
III) $-2 < x_1$
IV) $x_2 < 2$
V) $-2 < x_2$.

Rozwiązujemy nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Wtedy miejsca zerowe są równe:

$$x_1 = \frac{2m - 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$$

oraz

$$x_2 = \frac{2m + 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_1 < 2$:

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$\left(-2m < 1 - \sqrt{m} \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(1 - \sqrt{m} < 2m \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2m - \sqrt{m} + 1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \wedge \left(2m + \sqrt{m} - 1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(2\left(\sqrt{m} + 1\right)\left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(\left(\sqrt{m} < -1 \ \vee \ \sqrt{m} > \frac{1}{2}\right) \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(m > \frac{1}{4} \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_2 < 2$:

$$-2 < \frac{1+\sqrt{m}}{m} < 2$$

$$\left(-2m < 1+\sqrt{m} \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(1+\sqrt{m} < 2m \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2m+\sqrt{m}+1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \wedge \left(2m-\sqrt{m}-1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(2\left(\sqrt{m}-1\right)\left(\sqrt{m}+\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(\left(\sqrt{m} < -\frac{1}{2} \vee \sqrt{m} > 1\right) \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad (m > 1 \quad \wedge \quad m > 0)$$

$$m \in (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki I) – V) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

Uwaga.
Wszystkie wartości m, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz te miejsca zerowe, można wyznaczyć również następująco.

$$f(x) = m^2x^2 - 2mx - m + 1$$

$$f(x) = (mx-1)^2 - m$$

$$(mx-1)^2 - m = 0$$

$$(mx-1)^2 = m$$

Dla $m \leq 0$ to równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast dla $m > 0$ otrzymujemy:

$$mx - 1 = -\sqrt{m} \quad \vee \quad mx - 1 = \sqrt{m}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$$

Zatem funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wtedy, gdy $m \in (0 + \infty)$.

Sposób III (poprzez wzory Viète'a)

Przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\Delta > 0 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_1 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_2 \quad \wedge \quad 0 < x_1 + 2 \quad \wedge \quad 0 < x_2 + 2$$

Liczby $2 - x_1$ oraz $2 - x_2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.
Liczby $x_1 + 2$ oraz $x_2 + 2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.
Zatem przy $m \neq 0$ funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1, x_2 należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wówczas, gdy spełnione są poniższe warunki:

A) $\Delta > 0$
B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$
C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$
D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$
E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$.

Rozwiązujemy warunek A), tj. nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek B), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$$

$$\frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$4m^2 + 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m + 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek C), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 + 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \neq 0$$

Rozwiązujemy warunek D), stosując wzory Viète'a:

$$2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$$

$$4 - \frac{2m}{m^2} > 0$$

$$4m^2 - 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek E), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 - 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$(4m - 1)(m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki A) – E) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Zadanie 14. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1R) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|BC| = 5$ i $|CD| = 6$ oraz $P = 30\sqrt{3}$.

5 pkt – obliczenie długości boków BC oraz CD: $|BC| = 5$ oraz $|CD| = 6$.

4 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku BC lub długością boku CD), np.

$91 = |BC|^2 + (|BC| + 1)^2 - 2 \cdot |BC| \cdot (|BC| + 1) \cdot \cos 120°$,

$91 = \left(|BC| + 1 + \frac{1}{2} \cdot |BC|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BC|\right)^2$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi (długościami boków BC i CD), np. $\begin{cases} 9 + |CD| = 10 + |BC| \\ \left(\sqrt{91}\right)^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 120° \end{cases}$

3 pkt – spełnienie wszystkich warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt

ALBO

– spełnienie warunków 1) i 2) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCD i zapisanie równania $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|$,

ALBO

– spełnienie warunków 2) i 3) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BCD i zapisanie równania $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|$.

2 pkt – spełnienie dwóch spośród warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z warunków 1) – 3):

1) zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisanie zależności między długością boku BC a długością boku CD czworokąta, np. $9 + |CD| = 10 + |BC|$,

2) zapisanie jednego z dwóch równań: $|BD|^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60°$ lub $|BD|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\right)^2 + (9 - 5)^2$,

3) zastosowanie twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i obliczenie miary kąta BCD: $120°$.

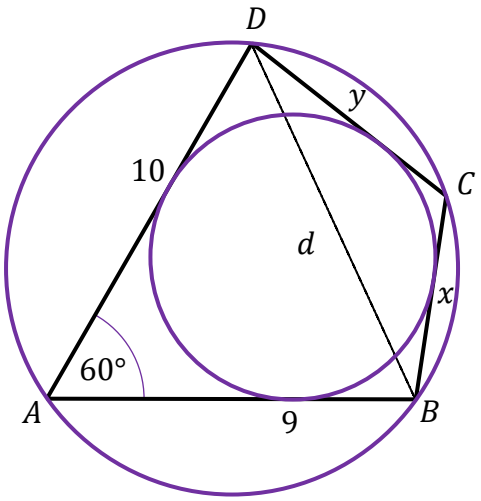
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów albo
b) błędne zastosowanie wzoru redukcyjnego, albo
c) błędne zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu (tj. zapisanie związku $9 \cdot |CD| = 10 \cdot |BC|$ lub $10 + |CD| = 9 + |BC|$), albo
d) błędne zastosowanie własności miarowych trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°$ i $60°$, albo
e) błędna interpretacja obliczonej długości jednego z dwóch szukanych boków czworokąta,

ale zdający realizuje poprawnie strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
Jeżeli zdający popełni dodatkowo błędy rachunkowe, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Przyjmijmy następujące oznaczenia: $x = |BC|$, $y = |CD|$, $d = |BD|$ (zobacz rysunek).



Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg, więc $60° + |\sphericalangle BCD| = 180°$, czyli $|\sphericalangle BCD| = 120°$.
W czworokąt $ABCD$ jest wpisany okrąg, więc $9 + y = 10 + x$, czyli $y = x + 1$.
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD i otrzymujemy

$$d^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60°$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta BCD i otrzymujemy:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 120°$$

$$d^2 = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60° = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = 3x^2 + 3x - 90$$

$$0 = x^2 + x - 30$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -6 \notin (0, +\infty)$$

Stąd $|BC| = 5$ i $|CD| = |BC| + 1 = 6$.
Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów ABD i BCD.
Obliczamy pole P czworokąta $ABCD$:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120° = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

Zadanie 15. (0–7)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania

Część a)

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – spełnienie kryterium zapisanego w pierwszym myślniku w kategorii za 1 punkt **oraz** zapisanie układu co najwyżej trzech równań niezależnych, umożliwiającego wyznaczenie h w zależności od x

ALBO

– wyznaczenie $\operatorname{tg}(2\alpha)$ w zależności od x, np. $\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{4rx}{x^2-4r^2}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– wyznaczenie zależności między P oraz x, np. $P^2=\frac{P}{r}\left(\frac{P}{r}-x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie związku między h i x oraz jedną z wielkości: długością b ramienia, lub długością odcinka CE, lub długością odcinka CS, np.:

$$b^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2\ ,\ \frac{r}{h-r}=\frac{\frac{1}{2}x}{b}\ ,\ \frac{1}{2}xh=r\cdot\left(\frac{1}{2}x+b\right),$$

ALBO

– zapisanie związku $\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{\frac{1}{2}x}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– zapisanie związku $P=\left(b+\frac{x}{2}\right)\cdot r$ lub $P=\sqrt{\left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-x\right)}$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– zapisanie związków $P=\frac{1}{2}b^2\sin(2\beta)$ oraz $\sin\beta=\frac{r}{h-r}$,

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ADC (lub trójkąta CES) w zależności od x i h (dla *sposobu IV*),

ALBO

– zapisanie długości przyprostokątnych trójkątów ADC oraz CES w zależności od x i h (dla *sposobu IV*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Kategorie za 1 punkt oraz za 2 punkty oceniamy w sytuacji, gdy zdający posługuje się symbolem r albo przyjmie $r=2$ lub $r=4$. Natomiast jeżeli zdający przyjmie promień inny niż 2 lub 4, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$ (m), **oraz** obliczenie pola trójkątnego klombu o takiej podstawie: $P\left(4\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$ (m^2).

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji P: $x = 4\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P, np. $P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. a) Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $2x^3$ oraz $x^2 - 16$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)}$ lub $\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).

b) Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $2x^3$ lub $x^2 - 16$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)}$ lub $\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

ORAZ:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji P

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „−”) znak pochodnej.

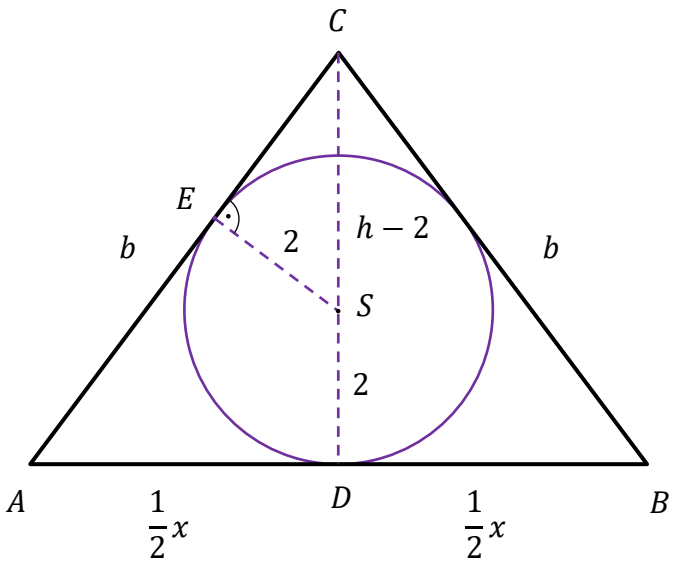
4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, lub w $(4, +\infty)$, lub w $(0, 10]$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązania

a)

Sposób I

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu, natomiast E – punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $b = |AC|$ (zobacz rysunek).



Korzystamy z podobieństwa trójkątów CES i CDA, otrzymując:

$$\frac{|SE|}{|CS|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{2}{h-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}$$

$$b = \frac{1}{4}x(h-2)$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ADC dostajemy:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\left(\frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 = h$$

$$h\left(\frac{1}{16}x^2 - 1\right) = \frac{1}{4}x^2$$

$$h(x^2 - 16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

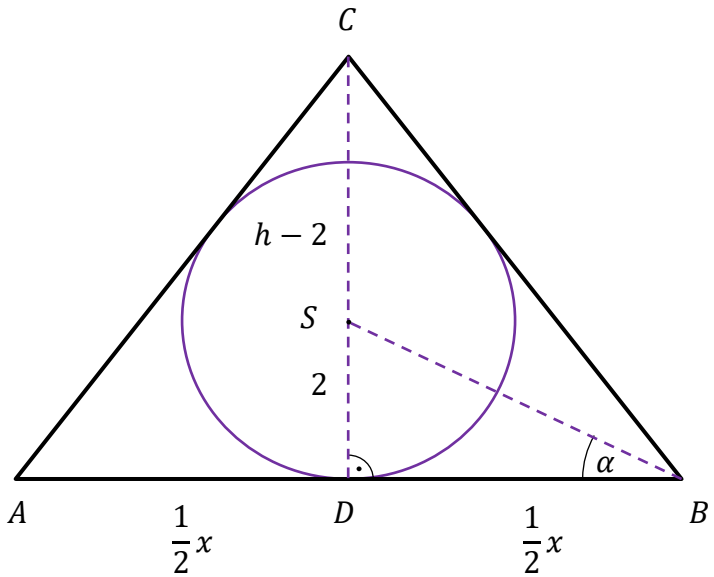
Wyznaczamy pole P trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle SBD|$ (zobacz rysunek).



Z trójkąta prostokątnego BSD otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{x}$.

Stąd i ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{4}{x}}{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{8x}{x^2-16}$$

Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc prosta SB jest dwusieczną kąta CBD. Zatem $\frac{h}{\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg}(2\alpha)$, czyli

$$h = \frac{1}{2}x\cdot\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4x^2}{x^2-16}$$

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x\cdot\frac{4x^2}{x^2-16} = \frac{2x^3}{x^2-16}$$

To należało wykazać.

Sposób III

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r=2$. Oznaczmy $b=|AC|$ i niech p będzie połową obwodu tego trójkąta.

Wówczas $p = \frac{b+b+x}{2} = b+\frac{1}{2}x$. Stąd i ze wzoru $P = p\cdot r$ otrzymujemy:

$$P = \left(b+\frac{1}{2}x\right)\cdot 2$$

$$b = \frac{P-x}{2}$$

Korzystamy ze wzoru Herona i otrzymujemy:

$$P = \sqrt{p(p-b)(p-b)(p-x)}$$

$$P = \sqrt{\left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-x\right)}$$

$$P^2 = \left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$$

Stąd i ze związku $b = \frac{P-x}{2}$ wyznaczamy pole trójkąta ABC:

$$P^2 = \left(\frac{P-x}{2}+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{P-x}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$$

$$P^2 = \frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{16}Px^2 - \frac{1}{8}x^3$$

$$16P = Px^2 - 2x^3$$

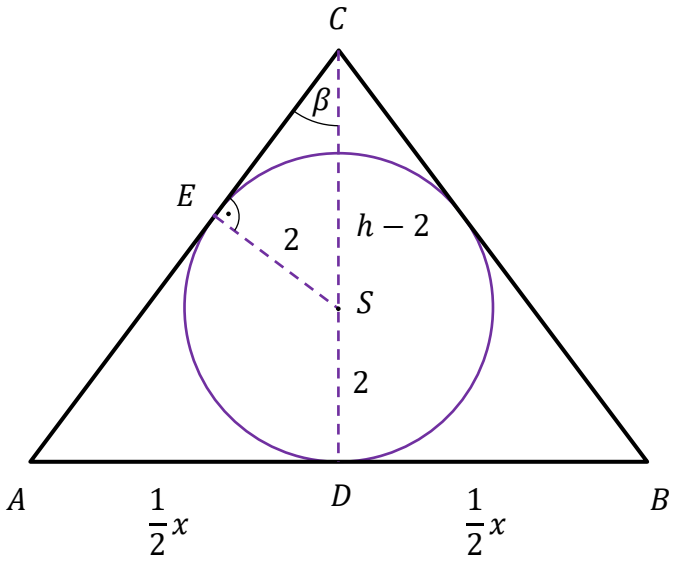
$$2x^3 = Px^2 - 16P$$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 16} = P$$

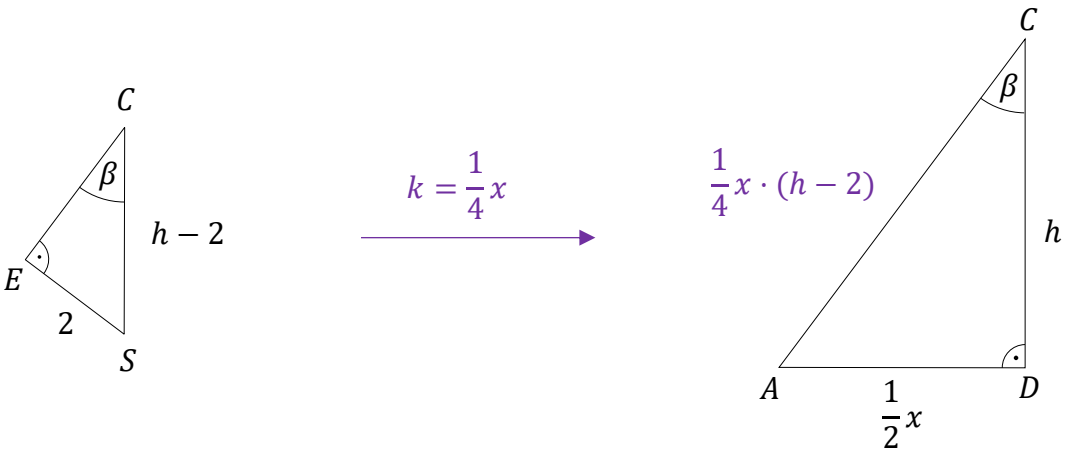
To należało wykazać.

Sposób IV

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości x i wysokości CD, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech S będzie środkiem tego okręgu, natomiast E – punktem styczności tego okręgu z ramieniem AC. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\beta = |\sphericalangle SCE|$ (zobacz rysunek).



Kąty w trójkątach ADC oraz SEC mają miary $90°$, β oraz $90° - \beta$, więc te trójkąty są podobne na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Trójkąt ADC jest podobny do trójkąta SEC w skali $k = \frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$. Zatem $|AC| = k \cdot |CS| = \frac{1}{4}x \cdot (h - 2)$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta ADC twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$\left[\frac{1}{4}x\cdot(h-2)\right]^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2$$

$$\left(\frac{1}{4}xh-\frac{1}{2}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h^2-\frac{1}{4}x^2h+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2+h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h-\frac{1}{4}x^2=h$$

$$h\left(\frac{1}{16}x^2-1\right)=\frac{1}{4}x^2$$

$$h(x^2-16)=4x^2$$

$$h=\frac{4x^2}{x^2-16}$$

Wyznaczamy pole P trójkąta ABC:

$$P=\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}x\cdot\frac{4x^2}{x^2-16}=\frac{2x^3}{x^2-16}$$

To należało wykazać.

b)

Obliczamy argument, dla którego funkcja P określona wzorem $P(x)=\frac{2x^3}{x^2-16}$ dla $x\in(4,10]$ osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji P: $P'(x)=\frac{6x^2\cdot(x^2-16)-2x^3\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}$ dla $x\in(4,10]$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P:

$$P'(x)=0$$

$$\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}=0$$

$$2x^2(x^2-48)=0$$

$$x=0\notin(4,10]\ \vee\ x=-4\sqrt{3}\notin(4,10]\ \vee\ x=4\sqrt{3}\in(4,10]$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x)<0$$

$$\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}<0\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x^2(x^2-48)<0\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x^2<48\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x\in\left(4,4\sqrt{3}\right)$$

więc $P'(x)<0$ dla $x\in\left(4,4\sqrt{3}\right)$ oraz $P'(x)>0$ dla $x\in\left(4\sqrt{3},10\right]$.
Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $(4,4\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $\left[4\sqrt{3},10\right]$.
Stąd funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $x=4\sqrt{3}$ (m). Wtedy

$$P\left(4\sqrt{3}\right)=\frac{2\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^3}{\left(4\sqrt{3}\right)^2-16}=12\sqrt{3}\quad(m^2)$$

Uwaga.
Funkcja P jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim\limits_{x\to4^+}P(x)=+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to10^-}P(x)=\frac{500}{21}$, więc uwzględniając wartość funkcji P w punkcie stacjonarnym $x=4\sqrt{3}$ równą $P\left(4\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}$, można sformułować wniosek, że funkcja P osiąga wartość najmniejszą równą $12\sqrt{3}$ dla argumentu $x=4\sqrt{3}$.