CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100-2208, EMAP-P0-200-2208, EMAP-P0-300-2208, EMAP-P0-400-2208, EMAP-P0-600-2208, EMAP-P0-700-2208, EMAP-P0-Q00-2208
Termin egzaminu:	23 sierpnia 2022 r.
Data publikacji dokumentu:	9 września 2022 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 3. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 4. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 5. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 6. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 8. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 9. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 10. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 11. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 12. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 13. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 14. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 15. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 16. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 18. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 20. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 21. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 22. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 23. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 24. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 25. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 26. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 27. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 28. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 29. (0–2)

Zasady oceniania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2-8x-3$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $3x^2-8x-3\geq 0$.

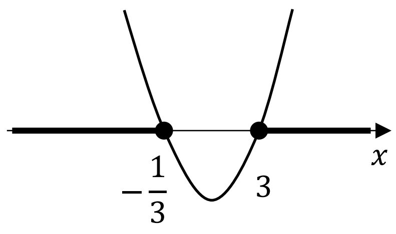
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy poprawnie zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, tj. obliczy/poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $3x^2-8x-3$: $x_1=-\frac{1}{3}$ oraz $x_2=3$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 pkt oraz poprawnie zrealizuje drugi etap rozwiązania, tj.:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right\rangle\cup\langle 3,+\infty)$ lub $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right\rangle\cup\langle 3,+\infty)$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:

1. Jeżeli zdający, realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, rozpoczynając realizację pierwszego etapu rozwiązania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3x^2 - 8x$) i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3x^2 - 8x \geq 0$), to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.
5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów oraz zapisze: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $(+\infty, 3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, -\infty\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy etap rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci $3x^2 - 8x - 3 \geq 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2 - 8x - 3$.

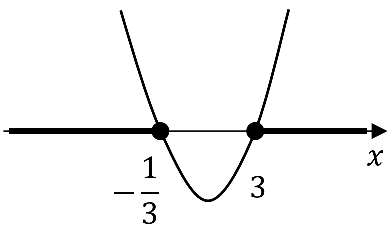
Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 100$ i stąd $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 3$

ALBO

podajemy pierwiastki trójmianu bezpośrednio, zapisując je lub zaznaczając je na wykresie: $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 3$.

Drugi etap rozwiązania

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ lub $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3, +\infty)$, lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej



Zadanie 30. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi x i y wynikające z warunków zadania, np.
  $(y-4)-x=y-(y-4)$ i $x+(y-4)+y=6$
  LUB
  $\frac{x+y}{2}=y-4$ i $x+(y-4)+y=6$

ALBO

- poda/obliczy różnicę r ciągu arytmetycznego: $r=4$ lub przyjmuje w rozwiązaniu, że $r=4$,

ALBO

- bez zapisania obliczeń poda poprawną odpowiedź: $(-2,2,6)$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy wszystkie wyrazy ciągu: $(-2,2,6)$.

Uwaga:
Jeśli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Ponieważ trzeci wyraz tego ciągu jest o 4 większy od drugiego wyrazu, więc różnica ciągu jest równa 4. Zatem ciąg możemy zapisać w postaci $(x,x+4,x+8)$. Suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 6, więc $x+(x+4)+(x+8)=6$. Stąd

$$3x+12=6$$

$$3x=-6$$

$$x=-2$$

Szukany ciąg to $(-2,2,6)$.

Sposób 2.
Korzystamy z definicji ciągu arytmetycznego i otrzymujemy $(y-4)-x=y-(y-4)$, czyli $y-4-x=4$.
Suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 6, więc $x+(y-4)+y=6$. Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y-4-x=4 \\ x+(y-4)+y=6 \end{cases}$:

$$\begin{cases} -x+y=4+4 \\ x+y+y=6+4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$3y = 18$$

$$y = 6$$

Zatem $-x + 6 = 8$ i stąd $x = -2$.
Szukany ciąg to $(-2, 2, 6)$.

Sposób 3.

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy $\frac{x+y}{2} = y - 4$. Suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 6, więc $x + (y - 4) + y = 6$. Z równania $\frac{x+y}{2} = y - 4$ wyznaczamy x:

$$x + y = 2(y - 4)$$

$$x + y = 2y - 8$$

$$x = y - 8$$

i podstawiamy wyrażenie $y - 8$ w miejsce x do równania $x + (y - 4) + y = 6$, otrzymując kolejno

$$(y - 8) + (y - 4) + y = 6$$

$$3y - 12 = 6$$

$$y = 6$$

Zatem $x = y - 8 = -2$ i szukany ciąg to $(-2, 2, 6)$.

Zadanie 31. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- przekształci nierówność $2a^2 - 4ab + 5b^2 > 0$ do postaci $2(a - b)^2 + 3b^2 > 0$ lub $a^2 + (a - 2b)^2 + b^2 > 0$

ALBO

- obliczy wyróżnik trójmianu $2a^2 - 4ab + 5b^2$ zmiennej a (lub zmiennej b) i zapisze, że jest on ujemny dla każdej liczby rzeczywistej b różnej od 0 (lub – odpowiednio – dla każdej liczby rzeczywistej a różnej od 0).

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, tzn.

- spełni kryterium określone w zasadach oceniania w pierwszej kropce za 1 pkt oraz sformułuje poprawny wniosek z powołaniem się na założenie

ALBO

- spełni kryterium określone w zasadach oceniania w drugiej kropce za 1 pkt oraz zapisze, że wykres funkcji $f(a) = 2a^2 - 4ab + 5b^2$ (lub funkcji $g(b) = 5b^2 - 4ab + 2a^2$ określonej dla każdego $b \neq 0$) leży powyżej osi odciętych i na tej podstawie sformułuje poprawny wniosek.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Przekształcamy równoważnie nierówność $2a^2 - 4ab + 5b^2 > 0$:

$$a^2 + a^2 - 4ab + 4b^2 + b^2 > 0$$

$$a^2 + (a - 2b)^2 + b^2 > 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny oraz kwadrat każdej liczby różnej od zera jest liczbą dodatnią, więc $a^2 + (a - 2b)^2 + b^2$ jest dodatnie, jako suma liczb dodatnich a^2 oraz b^2 i liczby nieujemnej $(a - 2b)^2$.
Zatem nierówność $a^2 + (a - 2b)^2 + b^2 > 0$ jest prawdziwa dla każdych liczb a i b różnych od zera. Stąd nierówność $2a^2 - 4ab + 5b^2 > 0$ jest również prawdziwa dla każdych liczb a i b różnych od zera. To należało pokazać.

Sposób 2.
Wyrażenie $2a^2 - 4ab + 5b^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej np. a.
Obliczamy wyróżnik trójmianu: $\Delta = (-4b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5b^2 = -24b^2 < 0$ dla każdej liczby $b \neq 0$. Zatem funkcja f określona wzorem $f(a) = 2a^2 - 4ab + 5b^2$ dla każdego

$a \neq 0$ nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc wykres funkcji f leży powyżej osi odciętych. Zatem ta funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.
Oznacza to, że dla każdych liczb a i b różnych od zera prawdziwa jest nierówność $2a^2 - 4ab + 5b^2 > 0$. To należało pokazać.

Zadanie 32. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy poprawnie przekształci równanie $\frac{4}{x+2} = x - 1$ do równania kwadratowego, np.
$(x+2)(x-1) = 4$, $x^2 + x - 6 = 0$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania wymiernego (np. stosuje przekształcenia równoważne) i uzyska poprawne rozwiązania: $x = -3$ lub $x = 2$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający nie zapisze zastrzeżenia $x \neq -2$, ale poprawnie przekształci równanie wymierne do równania kwadratowego i poprawnie to równanie kwadratowe rozwiąże, to może otrzymać **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe (które ma dwa rozwiązania rzeczywiste) i konsekwentnie rozwiąże je do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę i zapisze np. $4(x+2) = (x-1)(x+2)$ albo $4 = (x+2) \cdot x - 1$, nie uzyskując poprawnego równania, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający odgadnie jedno z rozwiązań równania, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli odgadnie dwa rozwiązania równania i nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz traktuje równanie jako nierówność (rysuje parabolę i podaje przedział(y) jako rozwiązanie), to otrzymuje **1 punkt**. Podobnie, jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz poda odpowiedź w postaci przedziału/sumy przedziałów o końcach (-3) i 2, to otrzymuje **1 punkt.**

Przykładowe pełne rozwiązanie
Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq -2$.
Przekształcamy równanie:

$$\frac{4}{x+2} = x - 1$$

$$4 = (x-1)(x+2)$$

$$4 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $x^2 + x - 6$: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
i stąd $x_1 = 2$ oraz $x_2 = -3$.
Otrzymane pierwiastki są różne od liczby (-2), więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 33. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy:

- obliczy długość odcinka ED: $|ED| = 6$

ALBO

- obliczy długość odcinka DS: $|DS| = 6\sqrt{3}$,

ALBO

- obliczy długość odcinka ES: $|ES| = 12$,

ALBO

- obliczy długość odcinka SF: $|SF| = 6$ (sposób 3.).

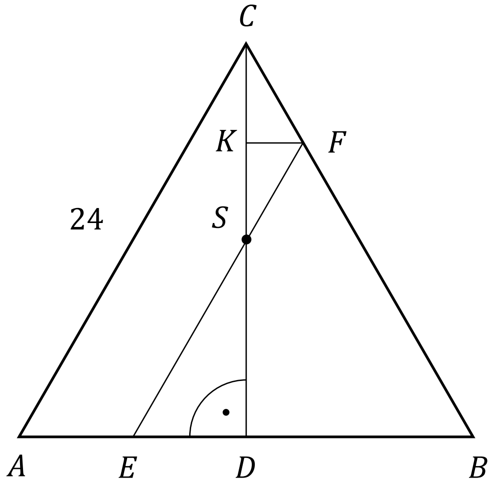
Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: $|EF| = 18$.

Uwaga:
Jeśli zdający zapisze tylko $|EF| = 18$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

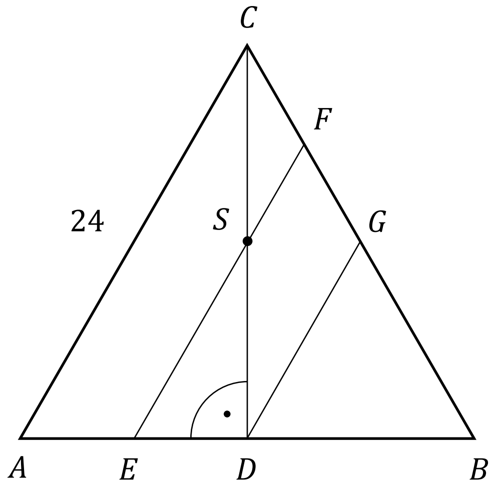
Sposób 1.
Ponieważ $ES \parallel AC$, więc $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle SED| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ESD| = 30^\circ$. Zatem trójkąty prostokątne ACD i ESD są podobne (na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd $\frac{|AD|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|SD|}$, więc $\frac{12}{|ED|} = 2$, czyli $|ED| = 6$.
Trójkąt EFB jest równoboczny, więc $|EF| = |EB| = |ED| + |DB| = 6 + 12 = 18$.

Sposób 2.
Wysokość trójkąta równobocznego ABC jest równa $\frac{24\sqrt{3}}{2}$, więc $|SD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
Ponieważ $\frac{|SD|}{|ES|} = \sin 60^\circ$, więc $\frac{6\sqrt{3}}{|ES|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i stąd $|ES| = 12$.
Niech K będzie środkiem odcinka CS.



Ponieważ $|\sphericalangle BCD| = 30°$ i $|\sphericalangle CSF| = |\sphericalangle DSE| = 30°$, więc trójkąt CSF jest równoramienny i FK jest wysokością tego trójkąta. Stąd $|KS| = \frac{1}{2} \cdot |CS| = \frac{1}{2} \cdot |SD| = 3\sqrt{3}$.
Ponieważ $\frac{|KS|}{|SF|} = \cos|\sphericalangle CSF|$, więc $\frac{3\sqrt{3}}{|SF|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $|SF| = 6$.
Obliczamy długość odcinka EF: $|EF| = |ES| + |SF| = 12 + 6 = 18$.

Sposób 3.
Niech G będzie punktem na boku BC, takim, że $DG \parallel AC$.



Wtedy trójkąt DBG jest równoboczny i $|DG| = 12$. Ponieważ $DG \parallel EF$, więc $|\sphericalangle GDC| = |\sphericalangle FSC|$ oraz $|\sphericalangle SFC| = |\sphericalangle DGC|$. Zatem trójkąty SFC i DGC są podobne (na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd $\frac{|DG|}{|SF|} = \frac{|CD|}{|CS|}$, więc $\frac{12}{|SF|} = 2$, czyli $|SF| = 6$.
Wysokość trójkąta równobocznego ABC jest równa $\frac{24\sqrt{3}}{2}$, więc $|SD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
Ponieważ $\frac{|SD|}{|ES|} = \sin 60°$, więc $\frac{6\sqrt{3}}{|ES|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i stąd $|ES| = 12$.
Obliczamy długość odcinka EF: $|EF| = |ES| + |SF| = 12 + 6 = 18$.

Zadanie 34. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub obliczy/poda ich liczbę: $|\Omega| = 5 \cdot 5$

ALBO

- przedstawi poprawny sposób wyznaczenia wszystkich elementów zbioru A lub wypisze (zaznaczy w tabeli) wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie wypisze żadnego niewłaściwego:
  $(-5,1), (-5,2), (-5,3), (-4,1), (-4,2), (-4,3),$
  $(1,-5), (2,-5), (3,-5), (1,-4), (2,-4), (3,-4),$

ALBO

- poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 12$,

ALBO

- sporządzi fragment drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A oraz zapisze prawdopodobieństwo $\frac{1}{5}$ na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

- zapisze $|A| = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2$ (lub $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 3$),

ALBO

- zapisze tylko $P(A) = \frac{12}{25}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 pkt oraz zastosuje poprawną metodę obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyska poprawny wynik:
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 12 lub 25 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający sporządzi jedynie tabelę o 25 pustych polach, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (a, b), gdzie $a, b \in \{-5, -4, 1, 2, 3\}$.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$.
Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(-5,1), (-5,2), (-5,3), (-4,1), (-4,2), (-4,3),$

$(1,-5)$, $(2,-5)$, $(3,-5)$, $(1,-4)$, $(2,-4)$, $(3,-4)$,
więc $|A| = 12$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25}$.

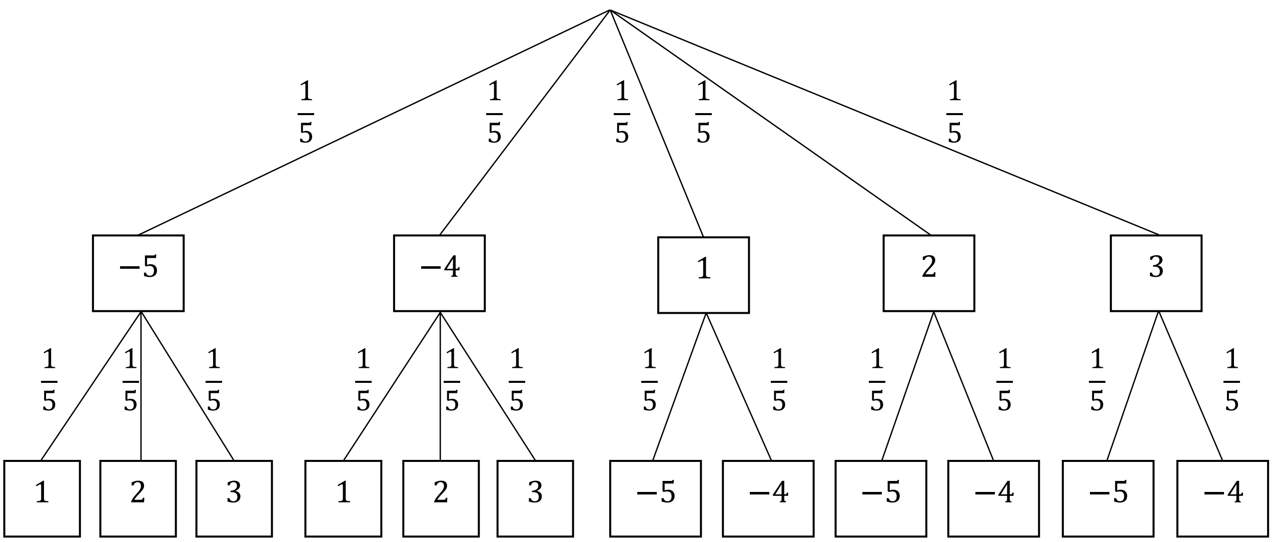
<u>Sposób 2.</u>
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (a, b), gdzie $a, b \in \{-5, -4, 1, 2, 3\}$.
Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

I losowanie

II losowanie		**−5**	**−4**	**1**	**2**	**3**
	−5			×	×	×
	−4			×	×	×
	1	×	×			
	2	×	×			
	3	×	×			

Symbolem × oznaczono pola odpowiadające zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.
Wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu jest 25.
Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest 12.
Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{25}$.

<u>Sposób 3.</u> (*drzewo stochastyczne*)
Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = 12 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{25}$$

Zadanie 35. (0–5)

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy zapisze równanie, w którym niewiadomą jest długość jednej z krawędzi podstawy $ABCD$, wynikające z uwzględnienia warunków zadania i zastosowania twierdzenia Pitagorasa, np. $b^2 + (3 + b)^2 = 15^2$, $(|CD| - 3)^2 + |CD|^2 = 15^2$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy obliczy długość jednej z krawędzi podstawy $ABCD$, np. $b = 9$, $|CD| = 12$.

Zdający otrzymuje .... **3 pkt**
gdy obliczy wysokość h graniastosłupa o podstawie $ABCD$: $h = 12\sqrt{3}$.

Zdający otrzymuje .... **4 pkt**
gdy:

- obliczy objętość V graniastosłupa: $V = 1296\sqrt{3}$

ALBO

- obliczy pole P_b powierzchni bocznej graniastosłupa: $P_b = 504\sqrt{3}$.

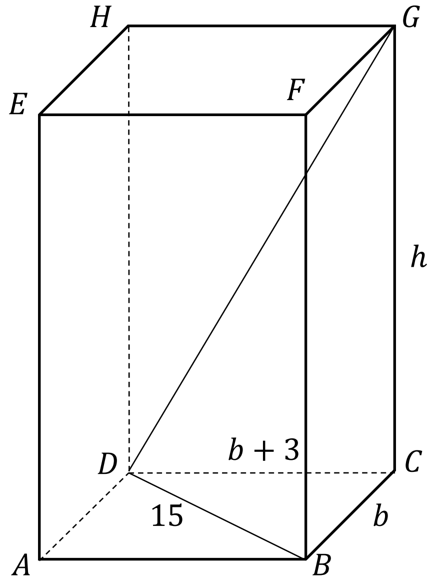
Zdający otrzymuje .... **5 pkt**
gdy zastosuje poprawną metodę obliczenia objętości V i pola P_b powierzchni bocznej graniastosłupa oraz otrzyma poprawne wyniki: $V = 1296\sqrt{3}$ i $P_b = 504\sqrt{3}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poda (bez stosownych obliczeń) długości boków podstawy $ABCD$, lecz dalej zapisze, że trójkąt o bokach $9, 12, 15$ jest prostokątny (lub sprawdzi rachunkiem, że taki trójkąt jest prostokątny) i bez błędu doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **5 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda (bez stosownych obliczeń) długości boków podstawy $ABCD$ i nie zapisze, że trójkąt o bokach $9, 12, 15$ jest prostokątny ani nie sprawdzi tego rachunkiem, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rzeczowy, np.: przyjmie $|CG| = 2|CD|$ lub $|CG| = \frac{|CD|}{\sqrt{3}}$, niepoprawnie zastosuje twierdzenie Pitagorasa, niepoprawnie zastosuje wzory skróconego mnożenia, i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający odgadnie długości boków podstawy $ABCD$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:
b – długość krótszej krawędzi podstawy $ABCD$,
h – wysokość graniastosłupa $ABCDEFGH$ opuszczona na podstawę $ABCD$
(zobacz rysunek).



Obliczamy długość krótszej krawędzi podstawy $ABCD$, stosując do trójkąta BCD twierdzenie Pitagorasa:

$$b^2 + (b+3)^2 = 15^2$$

$$b^2 + b^2 + 6b + 9 = 225$$

$$2b^2 + 6b - 216 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-216) = 49 \cdot 36$$

$$b = \frac{-6-42}{2 \cdot 2} < 0 \quad \text{lub} \quad b = \frac{-6+42}{2 \cdot 2} = 9$$

więc $|CD| = 3 + b = 3 + 9 = 12$.
Obliczamy wysokość h graniastosłupa:

$$\frac{h}{|CD|} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\frac{h}{12} = \sqrt{3}$$

$$h = 12\sqrt{3}$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa: $V = b \cdot (b+3) \cdot h = 9 \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 1296\sqrt{3}$.
Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej graniastosłupa:

$$P_b = 2 \cdot (b + b + 3) \cdot h = 2 \cdot (9 + 12) \cdot 12\sqrt{3} = 504\sqrt{3}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. ogólnych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.)
II. dodatkowych szczegółowych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – matura z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2022.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
    - błędnego przepisania,
    - przestawienia cyfr,
    - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie,
    - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.

10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. <u>Dodatkowe szczegółowe zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią</u>

Zadanie 29.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- stosuje poprawną metodę obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 8x - 3$, tzn. stosuje wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego i oblicza te pierwiastki, popełniając błędy tylko o charakterze dyskalkulicznym

ALBO

- w wyniku obliczeń otrzyma wyróżnik ujemny, ale konsekwentnie narysuje parabolę,

ALBO

- poprawnie rozwiązuje nierówność $3x^2 - 8x \geq 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),

ALBO

- dla wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności konsekwentnie wyznaczy zbiór rozwiązań tej nierówności.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

spełni jeden z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt oraz przedstawi rozwiązanie w postaci graficznej z poprawnie narysowaną parabolą, zaznaczonymi miejscami zerowymi oraz zaznaczeniem przedziałów, w których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci sumy przedziałów otwartych, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $(+\infty, 3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, -\infty\right)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. <u>Nie stosuje się</u> uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 30.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

zapisze równanie z niewiadomymi x i y wynikające z warunków zadania, np.
$(y-4)-x=y-(y-4)$ lub $x+(y-4)+y=6$, lub $\frac{x+y}{2}=y-4$, lub
$x+(y-4)+y=6$.

Zadanie 31.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

obliczy wyróżnik trójmianu $2a^2-4ab+5b^2$ zmiennej a (lub zmiennej b).

Zadanie 32.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- przekształca równanie wymierne do postaci równania kwadratowego, popełniając przy tym błędy tylko o charakterze dyskalkulicznym

ALBO

- popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{4}{x+2}=x-1$ do prostszej postaci, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania.

Uwaga:

W ocenie rozwiązania zadania 32. (dla zdających z dyskalkulią) <u>nie stosuje się</u> uwagi nr 3 do zadania ze standardowych zasad oceniania.

Zadanie 33.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

zapisze równanie, w którym jedyną niewiadomą jest długość odcinka ED (lub odcinka ES, lub SF), np. $\frac{12}{|ED|}=\frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$, $\frac{6\sqrt{3}}{|ES|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{12}{|SF|}=\frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$.

Zadanie 34.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze jedynie liczbę 25 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych)

ALBO

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, popełniając przy tym tylko błędy o charakterze dyskalkulicznym.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, popełniając przy tym tylko błędy o charakterze dyskalkulicznym, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.

Uwaga:
W ocenie rozwiązania zadania 34. (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi nr 1 ze standardowych zasad oceniania.

Zadanie 35.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.