

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b> <b>Test diagnostyczny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100-2212, MMAP-R0-200-2212, MMAP-R0-300-2212, MMAP-R0-400-2212, MMAP-R0-700-2212, MMAP-R0-Q00-2212, MMAP-R0-Z00-2212
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	20 grudnia 2022 r.

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zastosowanie wzorów na logarytm potęgi oraz na zamianę podstawy

logarytmu i poprawny wynik:  $\frac{9}{2}$ .

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie wyrażenia

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}} \text{ w postaci np.: } \frac{\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25}}{\log_7 \sqrt[6]{49}}, \frac{\log_{10} 5 \cdot \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 3}}{\frac{\log_{10} \sqrt[6]{49}}{\log_{10} 7}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu i otrzymujemy

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}} = \frac{\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25}}{\log_7 \sqrt[6]{49}} = \frac{\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5^2}}{\log_7 (7^2)^{\frac{1}{6}}}$$

Stosujemy wzór na logarytm potęgi i korzystamy z definicji logarytmu, otrzymując

$$\frac{\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5^2}}{\log_7 (7^2)^{\frac{1}{6}}} = \frac{\log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \log_3 5}}{\frac{1}{3} \log_7 7} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

<sup>1</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 ([Dz.U. poz. 1246](#)).

**Zadanie 2.1. (0–2)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.R1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y =  f(x) $ .

**Zasady oceniania**

2 pkt – obliczenie wartości funkcji  $g(11)$  oraz zapisanie zbioru wszystkich wartości, jakie funkcja  $g$  przyjmuje w przedziale  $[9, 11]$ :  $g(11) = \frac{9}{4}$  oraz  $\left[0, \frac{9}{4}\right]$ .

1 pkt – obliczenie miejsc zerowych funkcji  $g$  i obliczenie pierwszej współrzędnej  $p$  punktu, w którym funkcja ma maksimum lokalne (lub zapisanie, że  $p \notin [9, 11]$ ): 2 i 10 oraz  $p = 6$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy miejsca zerowe funkcji  $g$ :

$$\left| -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \right| = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{lub} \quad x = 10$$

Niech  $f$  będzie funkcją kwadratową określoną wzorem  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$ .

W przedziale  $[2, 10]$  funkcja  $f$  przyjmuje wartości nieujemne, więc w tym przedziale wykres funkcji  $g$  pokrywa się z wykresem funkcji  $f$ . W przedziałach  $(-\infty, 2)$  oraz  $(10, +\infty)$  funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne, więc w tych przedziałach wykres funkcji  $g$  jest obrazem wykresu funkcji  $f$  w symetrii względem osi  $Ox$  układu współrzędnych.

Obliczamy pierwszą współrzędną  $p$  wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ :

$$p = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 6.$$

Ponieważ  $p < 9$ , więc funkcja  $g$  w przedziale  $[9, 10]$  jest malejąca, a w przedziale  $[10, 11]$  jest rosnąca. Obliczamy  $g(9)$  i  $g(11)$ :

$$g(9) = \left| -\frac{1}{4} \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 5 \right| = \left| -\frac{1}{4} \cdot 81 + 27 - 5 \right| = \left| -20\frac{1}{4} + 22 \right| = \frac{7}{4}$$

$$g(11) = \left| -\frac{1}{4} \cdot 11^2 + 3 \cdot 11 - 5 \right| = \left| -\frac{1}{4} \cdot 121 + 33 - 5 \right| = \left| -30\frac{1}{4} + 28 \right| = \frac{9}{4}$$

Zbiorem wszystkich wartości, jakie funkcja  $g$  przyjmuje w zbiorze  $[9, 11]$ , jest  $\left[0, \frac{9}{4}\right]$ .

### Zadanie 2.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną [...]; III.R5) analizuje [...] równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

#### Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie wartości  $m$  dla których równanie  $g(x) = |m|$  posiada dwa rozwiązania tego samego znaku:  $m \in (-5, -4) \cup \{0\} \cup (4, 5)$ .

1 pkt – obliczenie/zapisanie drugiej współrzędnej punktu przecięcia wykresu funkcji  $g$  z osią  $Oy$  oraz obliczenie wartości  $q$  lokalnego maksimum funkcji  $g$ : 5 oraz  $q = 4$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy drugą współrzędną punktu przecięcia wykresu funkcji  $g$  z osią  $Oy$ :

$$g(0) = |-5| = 5$$

Niech  $f$  będzie funkcją kwadratową określoną wzorem  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$ .

Obliczamy drugą współrzędną  $q$  wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ :

$$q = -\frac{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-5)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 4$$

Wykres funkcji  $g$  jest wykresem funkcji  $y = |f(x)|$ , więc funkcja  $g$  ma lokalne maksimum równe 4.

Przyjmijmy  $k = |m|$ . Na podstawie analizy własności funkcji  $g$  wyznaczamy wartości  $k$  dla których równanie  $g(x) = k$  posiada dwa rozwiązania dodatnie:  $k \in (4, 5) \cup \{0\}$ .

Obliczamy wartości parametru  $m$ :

$$|m| = 0 \text{ lub } 4 < |m| < 5$$

Stąd  $m = 0$  lub  $m \in (-5, -4) \cup (4, 5)$ .

Zatem  $m \in (-5, -4) \cup \{0\} \cup (4, 5)$ .

**Zadanie 3. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R3) korzysta ze wzorów na: $(a + b)^3$ , $(a - b)^3$ , $a^3 + b^3$ i $a^3 - b^3$ .

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tj. przekształcenie nierówności do postaci

$$(x + y - 1)(x - y)^2 \geq 0 \text{ oraz uzasadnienie jej prawdziwości dla wszystkich liczb rzeczywistych } x \text{ oraz } y \text{ spełniających warunek } x + y \geq 1.$$

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci  $(x + y - 1)(x - y)^2 \geq 0$ .

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci, w której wyrażenie  $(x + y)$  występuje jako wspólny czynnik w co najmniej dwóch iloczynach, np.

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$$

ALBO

przekształcenie nierówności do postaci, w której wyrażenie  $(x - y)$  występuje jako wspólny czynnik w co najmniej dwóch iloczynach, np.

$$x^2(x - y) - y^2(x - y) - (x - y)^2 \geq 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przekształcamy nierówność  $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$  w sposób równoważny

$$x^3 + y^3 - xy(x + y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x + y)[(x^2 - xy + y^2) - xy] - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2(x + y - 1) \geq 0$$

Ponieważ:

- z założenia  $x + y \geq 1$  wynika, że  $x + y - 1 \geq 0$
- kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

więc iloczyn  $(x - y)^2(x + y - 1)$  jest liczbą nieujemną jako iloczyn liczb nieujemnych  $x + y - 1$  oraz  $(x - y)^2$ .

To oznacza, że nierówność  $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$  jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  oraz  $y$  spełniających warunek  $x + y \geq 1$ .

To należało wykazać.

### Sposób II

Przekształcamy nierówność  $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$  w sposób równoważny

$$x^3 + y^3 - xy(x + y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0$$

$$x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$x^2(x - y) - y^2(x - y) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - y^2)(x - y) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2(x + y - 1) \geq 0$$

Ponieważ:

- z założenia  $x + y \geq 1$  wynika, że  $x + y - 1 \geq 0$
- kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

więc iloczyn  $(x - y)^2(x + y - 1)$  jest liczbą nieujemną jako iloczyn liczb nieujemnych  $x + y - 1$  oraz  $(x - y)^2$ .

To oznacza, że nierówność  $x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$  jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  oraz  $y$  spełniających warunek  $x + y \geq 1$ .

To należało wykazać.

**Zadanie 4. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa i poprawny wynik:

$$P(A) \approx 0,68.$$

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$  próbach Bernoullego i zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$  w postaci

$$P(A) = \binom{20}{0} \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0,1)^1 \cdot (0,9)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}.$$

1 pkt – określenie sukcesu i porażki w pojedynczej próbie Bernoullego oraz podanie ich prawdopodobieństw:  $p = 0,1$  oraz  $q = 0,9$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Próba Bernoullego jest kontrola masy herbaty nasypanej przez maszynę do torebki.

Sukcesem w tej próbie jest uzyskanie torebki herbaty z niedowagą. Prawdopodobieństwo  $p$  sukcesu jest równe  $0,1$ , natomiast prawdopodobieństwo  $q$  porażki jest równe  $0,9$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych do kontroli 20 torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą. Przez  $P_{20}(k)$  oznaczymy prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród skontrolowanych 20 torebek znajdzie się dokładnie  $k$  torebek z niedowagą.

Wtedy  $P(A) = P_{20}(0) + P_{20}(1) + P_{20}(2)$ . Zatem

$$P(A) = \binom{20}{0} \cdot (0,1)^0 \cdot (0,9)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0,1)^1 \cdot (0,9)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}$$

$$P(A) = (0,9)^{18} \cdot 4,51 \approx 0,68$$

### Zadanie 5. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$ .

#### Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i poprawny wynik:  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$  lub

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

3 pkt – rozwiązanie równania elementarnego  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  (lub  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ):

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (lub: } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ oraz } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}).$$

2 pkt – przekształcenie równania  $6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$  do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.  $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$  lub  $2 \cos x + 1 = 0$ , dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

1 pkt – zapisanie, że lewa strona równania ma sens liczbowy dla  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  oraz przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu, np.

$$(3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3})(2 \cos x + 1) = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązań równania szukamy wśród liczb  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ , gdyż tangens nie jest określony dla liczb postaci  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  (gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Przekształcamy lewą stronę równania do postaci iloczynu:

$$6 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$6 \operatorname{tg} x \cdot \cos x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$2 \cos x (3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3}) + (3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$$

$$(3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3})(2 \cos x + 1) = 0$$

Otrzymane równanie jest równoważne alternatywie równań:

$$3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \text{ lub } 2 \cos x + 1 = 0$$

Stąd

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Żadna z otrzymanych liczb nie jest postaci  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Rozwiązaniami równania są liczby postaci:  $-\frac{\pi}{6} + k\pi$  oraz  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ , oraz  $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,  
gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Zadanie 6. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

**Zasady oceniania**

4 pkt – wyznaczenie miar pozostałych kątów trójkąta  $ABC$ .

3 pkt – obliczenie miary kąta  $\gamma$ :  $\gamma = 60^\circ$ .

2 pkt – zastosowanie twierdzenia o kątach wierzchołkowych i zapisanie zależności

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie i zapisanie zależności

$$|\sphericalangle LPK| = 180^\circ - \gamma$$

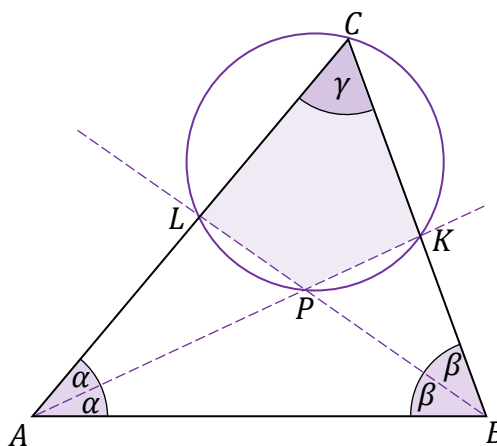
ALBO

zastosowanie twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i zapisanie zależności  $|\sphericalangle APB| = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ na czworokącie  $CLPK$  można opisać okrąg, więc  $|\sphericalangle LPK| = 180^\circ - \gamma$ .  
Z własności kątów wierzchołkowych

$$|\sphericalangle LPK| = |\sphericalangle APB| = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Zatem

$$180^\circ - \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Stąd

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Korzystamy z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i otrzymujemy:

$$\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\gamma + 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$3\gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Analogicznie, ponieważ na czworokącie  $BKPM$  można opisać okrąg, więc  $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ .  
Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCA| = 60^\circ$$

Zatem trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.

To należało wykazać.

### Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.</p> <p>I. Sprawność rachunkowa.</p> <p>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu;</p> <p>XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.</p>

#### Zasady oceniania

4 pkt – wyznaczenie poziomu produkcji, przy którym przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju jest najmniejszy oraz obliczenie najmniejszego przeciętnego kosztu produkcji:

$$x = 15 \text{ oraz } K(15) = 38,50 \text{ zł.}$$

3 pkt – zbadanie znaku pochodnej funkcji  $K$ :  $K'(x) < 0$  dla  $x \in [0, 15)$  oraz  $K'(x) > 0$  dla  $x \in (15, 50]$ , oraz wyznaczenie (z uzasadnieniem) wartości zmiennej  $x$ , dla której funkcja  $K$  osiąga wartość najmniejszą, np.: funkcja  $K$  (określona na przedziale  $[0, 50]$ ) jest malejąca w przedziale  $[0, 15]$  oraz rosnąca w przedziale  $[15, 50]$ , więc w punkcie  $x = 15$  osiąga najmniejszą wartość.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $K$ :  $x = 15$ .

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $K$ :

$$K'(x) = \frac{(44x - 621,5)(480 + x) - 1 \cdot (22x^2 - 621,5x + 23\,430)}{(480 + x)^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

- Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.
- Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja  $K$  posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $x$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
  - opisuje (słownie lub graficznie, np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $K$  lub
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $K$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość w przyjętej dziedzinie.

Jeśli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeśli zdający uzasadnia istnienie najmniejszej wartości funkcji  $K$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji  $K(x) = \frac{22x^2 - 621,5x + 23\,430}{480 + x}$ :

$$K'(x) = \frac{(44x - 621,5)(480 + x) - 1 \cdot (22x^2 - 621,5x + 23\,430)}{(480 + x)^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$K'(x) = 0$$

$$\frac{22x^2 + 44 \cdot 480x - 321\,750}{(480 + x)^2} = 0$$

$$22x^2 + 44 \cdot 480x - 321\,750 = 0$$

$$x^2 + 960x - 14\,625 = 0$$

$$x = -975 \notin [0, 50] \quad \text{lub} \quad x = 15 \in [0, 50]$$

Ponieważ  $K'(x) < 0$  dla  $x \in [0, 15)$  oraz  $K'(x) > 0$  dla  $x \in (15, 50]$ , więc funkcja  $K$  (określona na przedziale  $[0, 50]$ ) jest malejąca w przedziale  $[0, 15]$  oraz rosnąca w przedziale  $[15, 50]$ . Stąd funkcja  $K$  osiąga wartość najmniejszą dla argumentu  $x = 15$ .

Przeciętny koszt wytworzenia jednego litra oleju jest najmniejszy przy poziomie produkcji 495 litrów dziennie.

Obliczamy najmniejszy przeciętny koszt wytworzenia jednego litra oleju:

$$K(15) = \frac{22 \cdot 15^2 - 621,5 \cdot 15 + 23\,430}{480 + 15} = 38,50 \text{ zł}$$

### Zadanie 8. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{(x+1)}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

#### Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania nierówności wymiernej oraz poprawny

wynik:  $[-3, -2) \cup (2, \frac{5}{2}]$ .

4 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności:  $R \setminus \{-2, 2\}$  oraz zapisanie nierówności

w postaci  $\frac{-2(x - \frac{5}{2})(x+3)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

ALBO

rozwiązanie nierówności wielomianowej  $-2(x - \frac{5}{2})(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0$ :

$[-3, -2] \cup [2, \frac{5}{2}]$ .

3 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności:  $R \setminus \{-2, 2\}$  oraz zapisanie nierówności

w postaci  $\frac{-2x^2 - x + 15}{(x-2)(x+2)} \geq 0$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci  $\frac{-2(x - \frac{5}{2})(x+3)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ .

2 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności:  $R \setminus \{-2, 2\}$  oraz zapisanie nierówności

w postaci  $\frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{2x+7}{2+x}$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci  $\frac{-2x^2 - x + 15}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ .

1 pkt – wyznaczenie dziedziny nierówności:  $R \setminus \{-2, 2\}$

ALBO

zapisanie nierówności w postaci  $\frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{2x+7}{2+x}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę nierówności  $\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geq \frac{3}{2+x} + 2$ :

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \text{i} \quad 2 - x \neq 0 \quad \text{i} \quad 2 + x \neq 0$$

Zatem nierówność ma sens liczbowy dla  $x \in R \setminus \{-2, 2\}$ .

Przekształcamy kolejno nierówność, otrzymując:

$$\begin{aligned} \frac{x-1+x+2}{(x-2)(x+2)} &\geq \frac{2x+7}{2+x} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} &\geq \frac{(2x+7)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x+7)(x-2)}{(x-2)(x+2)} &\geq 0 \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x^2+3x-14}{(x-2)(x+2)} &\geq 0 \\ \frac{-2x^2-x+15}{(x-2)(x+2)} &\geq 0 \\ \frac{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)}{(x-2)(x+2)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ponieważ znak wyrażenia wymiernego  $\frac{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$  jest taki sam, jak wyrażenia będącego iloczynem licznika i mianownika tego ułamka algebraicznego, więc

$$-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0$$

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności wielomianowej

$$-2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0 \text{ jest zbiór } [-3, -2] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right].$$

Uwzględniamy dziedzinę nierówności wymiernej i otrzymujemy zbiór wszystkich rozwiązań nierówności wymiernej:  $[-3, -2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$ .

### Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności [...] kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

#### Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody oraz poprawny wynik:  $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right)$ .

4 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$  oraz zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  (wynikającej z warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ ) w postaci  $-7m^3 + 76m^2 - 272m + 320 < 0$  lub

$$(m - 4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0, \text{ lub } -7(m - 4)^2\left(m - \frac{20}{7}\right) < 0$$

ALBO

poprawne rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  (wynikającej z warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ ):  $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$ .

3 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$  oraz zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$ , która wynika z warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ , np.

$$(m - 4)[(m - 4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m - 4)$$

ALBO

zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  (wynikającej z warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ ) w postaci  $-7m^3 + 76m^2 - 272m + 320 < 0$  lub

$$(m - 4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0, \text{ lub } -7(m - 4)^2\left(m - \frac{20}{7}\right) < 0.$$

2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$  oraz przekształcenie warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$$

ALBO

zastosowanie wzorów Viète'a i zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$ , która wynika z warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$ , np.

$$(m - 4)[(m - 4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m - 4).$$

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$

ALBO

przekształcenie warunku  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Trójmian  $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste tylko wtedy, gdy jego wyróżnik  $\Delta$  jest dodatni, tj.

$$(m - 4)^2 - 4(m^2 - 7m + 12) > 0$$

$$-3m^2 + 20m - 32 > 0$$

$$-3(m - 4)\left(m - \frac{8}{3}\right) > 0$$

Zatem  $m \in \left(\frac{8}{3}, 4\right)$ .

Nierówność  $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$  przekształcamy równoważnie do postaci, która pozwoli na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a:

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$$

$$(x_1 + x_2)[x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] < 5x_1x_2(x_1 + x_2)$$

Stosujemy wzory Viète'a i otrzymujemy:

$$(m - 4)[(m - 4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)] < 5(m^2 - 7m + 12)(m - 4)$$

$$(m - 4)[(m - 4)^2 - 8(m^2 - 7m + 12)] < 0$$

$$(m - 4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0$$

$$-7(m - 4)^2\left(m - \frac{20}{7}\right) < 0$$

$$m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$$

Częścią wspólną zbiorów  $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$  i  $\left(\frac{20}{7}, 4\right) \cup (4, +\infty)$  jest  $\left(\frac{20}{7}, 4\right)$ .

Równanie  $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, spełniające warunki zadania, dla  $m \in \left(\frac{20}{7}, 4\right)$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.R5) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

#### Zasady oceniania

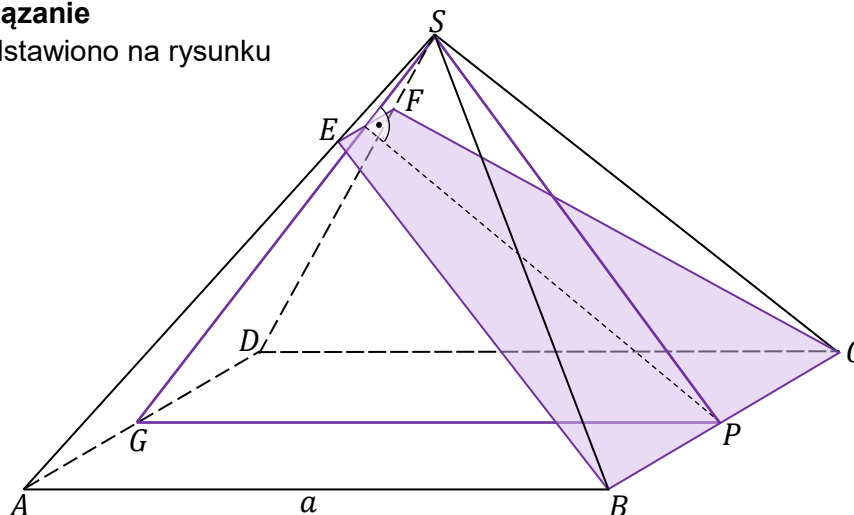
- 5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $P_{\text{przekroju}} = \frac{27\sqrt{10}}{100}a^2$ .
- 4 pkt – obliczenie wysokości  $h$  oraz długości podstawy  $EF$  trapezu  $BCFE$ :  $h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$  oraz  $|EF| = 0,8a$ .
- 3 pkt – obliczenie długości podstawy  $EF$  trapezu  $BCFE$ :  $|EF| = 0,8a$   
ALBO  
obliczenie wysokości  $h$  trapezu  $BCFE$ :  $h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$ .
- 2 pkt – zapisanie zależności prowadzącej do obliczenia długości podstawy  $EF$  trapezu, np.  
 $\frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|RS|}{|SG|}$   
ALBO  
obliczenie  $|SG| = \frac{\sqrt{10}}{2}a$  oraz  $|RS| = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$ ,  
ALBO  
zapisanie zależności prowadzącej do obliczenia wysokości  $h$  trapezu  $BCFE$ , np.  
 $\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{h}{a}$ .
- 1 pkt – zapisanie, że przekrój jest trapezem (równoramiennym).
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga.

Jeśli zdający nie zapisze, że przekrój jest trapezem, lecz realizuje strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Odpowiedni przekrój przedstawiono na rysunku obok.



$P$  i  $G$  – środki krawędzi, odpowiednio,  $BC$  i  $AD$ .

$E \in AS$  i  $F \in DS$ , i  $EF \parallel AD$ . Podstawa  $ABCD$  jest kwadratem o boku  $a$ . Krawędzie boczne są równej długości.

Otrzymany przekrój  $BCFE$  jest trapezem równoramiennym.

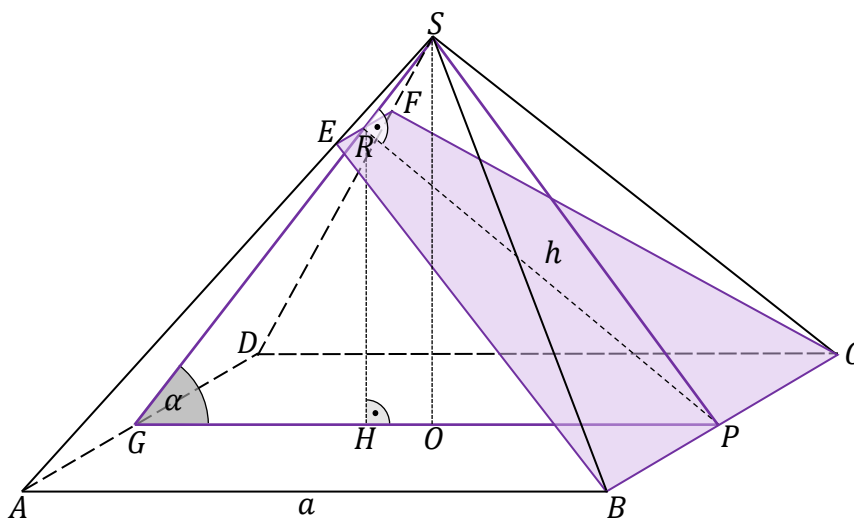
Wprowadzamy oznaczenia:

$O$  – punkt przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ ,

$R$  – środek odcinka  $EF$ ,

$H$  – rzut prostokątny punktu  $R$  na płaszczyznę podstawy  $ABCD$ ,

$h$  – wysokość trapezu  $BCFE$ .



Trójkąt  $SOG$  jest prostokątny, więc z definicji funkcji cosinus otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|OG|}{|SG|}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\frac{1}{2}a}{|SG|}$$

Stąd wysokość ściany bocznej ostrosłupa jest równa  $|SG| = \frac{\sqrt{10}}{2}a$ .

Trójkąt  $GPR$  jest prostokątny, więc z definicji funkcji cosinus otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|RG|}{|GP|}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{|RG|}{a}$$

$$|RG| = \frac{\sqrt{10}}{10}a$$

Obliczamy długość odcinka  $RS$ :

$$|RS| = |SG| - |RG|$$

$$|RS| = \frac{\sqrt{10}}{2}a - \frac{\sqrt{10}}{10}a$$

$$|RS| = \frac{2\sqrt{10}}{5}a$$

Trójkąty  $ADS$  i  $EFS$  na mocy cechy  $kkk$  są podobne, więc

$$\frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|RS|}{|SG|}$$

Stąd wyznaczamy długość podstawy  $EF$  trapezu  $BCFE$ :

$$\frac{|EF|}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}a}{\frac{\sqrt{10}}{2}a}$$

$$|EF| = 0,8a$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i obliczamy  $\sin \alpha$ :

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Trójkąt  $GRP$  jest prostokątny. Korzystamy z definicji funkcji sinus i obliczamy wysokość  $h$  przekroju:

$$\sin \alpha = \frac{|RP|}{|GP|}$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{a}$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{h}{a}$$

$$h = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$$

Obliczamy pole przekroju:  $P_{\text{przekroju}} = \frac{a+0,8a}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}a = 0,9a \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}a = \frac{27\sqrt{10}}{100}a^2$ .

**Zadanie 11. (0–5)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów; VII.R5) korzysta ze wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

**Zasady oceniania**

5 pkt – obliczenie pola  $P$  i obwodu  $L$  trapezu i poprawne wyniki:  $P = \frac{27648}{625}$ ,  $L = 27,36$ .

4 pkt – obliczenie długości dłuższej podstawy oraz obliczenie wysokości trapezu:  $a = \frac{234}{25}$ ,

$$h = \frac{144}{25}$$

ALBO

obliczenie długości dłuższej i krótszej podstawy:  $a = \frac{234}{25}$  oraz  $b = 6$ ,

ALBO

obliczenie pola  $P$  trapezu:  $P = \frac{27648}{625}$ ,

ALBO

obliczenie obwodu  $L$  trapezu:  $L = 27,36$ .

3 pkt – obliczenie długości dłuższej podstawy:  $a = \frac{234}{25}$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu oraz obliczenie długości odcinka  $EB$ :  $h = \frac{144}{25}$  oraz

$$|EB| = \frac{42}{25},$$

ALBO

obliczenie długości odcinka  $AE$ :  $|AE| = \frac{192}{25}$ .

2 pkt – obliczenie sinusa kąta  $ACB$ :  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{117}{125}$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu:  $h = \frac{144}{25}$ ,

ALBO

obliczenie długości odcinka  $EB$ :  $|EB| = \frac{42}{25}$ ,

ALBO

obliczenie długości odcinka  $AC$ :  $|AC| = \frac{48}{5}$ .

1 pkt – obliczenie sinusa kąta  $BAC$ :  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

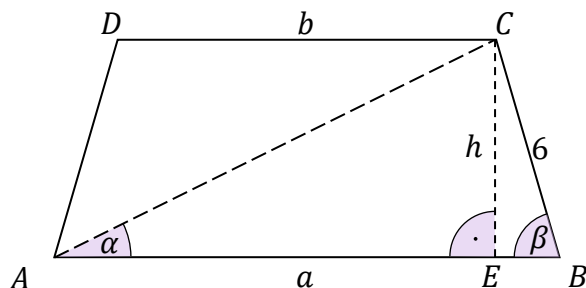
Przyjmijmy oznaczenia:

$a$  – długość dłuższej podstawy trapezu,

$b$  – długość krótszej podstawy trapezu,

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle ABC| = \beta$ ,

$CE$  – wysokość poprowadzona z wierzchołka  $C$  trapezu na podstawę  $AB$ .



Ponieważ na trapezie  $ABCD$  opisano okrąg, więc trapez jest równoramienny. Promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  jest równy promieniowi okręgu opisanego na trapezie  $ABCD$ . Ponieważ  $|AB| > |CD|$ , więc  $\alpha < 90^\circ$  i  $\beta < 90^\circ$ .

Stosujemy twierdzenie sinusów w trójkącie  $ABC$  i obliczamy sinus kąta  $\alpha$ :

$$\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .

Obliczamy sinus kąta  $\beta$ .

Ponieważ  $\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$ , więc

$$\sin \beta = \frac{8}{5} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy  $\cos \beta = \frac{7}{25}$ .

Obliczamy sinus kąta  $(\alpha + \beta)$ , korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{117}{125}$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta  $ABC$  i obliczamy długość dłuższej podstawy trapezu:

$$\frac{a}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$$

$$\frac{a}{\frac{117}{125}} = 10$$

$$a = \frac{234}{25}$$

Trójkąt  $BEC$  jest prostokątny. Obliczamy wysokość  $h$  trapezu, długość odcinka  $EB$  oraz długość krótszej podstawy trapezu:

$$\frac{h}{|BC|} = \sin \beta \quad \text{oraz} \quad \frac{|EB|}{|BC|} = \cos \beta$$

$$\frac{h}{6} = \frac{24}{25} \quad \text{oraz} \quad \frac{|EB|}{6} = \frac{7}{25}$$

$$h = \frac{144}{25} \quad \text{oraz} \quad |EB| = \frac{42}{25}$$

$$b = a - 2 \cdot |EB|$$

$$b = \frac{234}{25} - 2 \cdot \frac{42}{25} = 6$$

Obliczamy pole  $P$  i obwód  $L$  trapezu:

$$P = \frac{\frac{234}{25} + 6}{2} \cdot \frac{144}{25} = \frac{27648}{625}$$

$$L = 3 \cdot 6 + \frac{234}{25} = 27,36$$

**Zadanie 12. (0–6)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie [...]; IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

**Zasady oceniania**

6 pkt – obliczenie odległości  $h_C$  punktu  $C$  od prostej  $k$  oraz pola  $P$  trójkąta  $ABC$ :

$$h_C = \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ i } P = 54.$$

5 pkt – obliczenie pola  $P$  trójkąta  $ABC$ :  $P = 54$

ALBO

obliczenie odległości  $h_C$  punktu  $C$  od prostej  $k$  oraz obliczenie współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ :  $h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$  oraz  $A = (7, 2)$  i  $B = (-5, 14)$ .

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A, B$  oraz  $C$ :  $A = (7, 2)$ ,  $B = (-5, 14)$  i  $C = (1, -1)$

ALBO

obliczenie odległości  $h_C$  punktu  $C$  od prostej  $k$  oraz zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ :

$$h_C = \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ oraz } \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  i  $B$  oraz wyznaczenie pochodnej funkcji

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}: A = (7, 2) \text{ i } B = (-5, 14) \text{ oraz } y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

ALBO

obliczenie współrzędnych punktu  $C$  oraz zapisanie układu równań prowadzącego do

$$\text{obliczenia współrzędnych punktów } A \text{ i } B: C = (1, -1) \text{ oraz } \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

ALBO

obliczenie odległości  $h_C$  punktu  $C$  od prostej  $k$ :  $h_C = \frac{9}{\sqrt{2}}$ .

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ :  $A = (7, 2)$  i  $B = (-5, 14)$

ALBO

obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (1, -1)$ ,

ALBO

zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów  $A$  i  $B$

oraz wyznaczenie pochodnej funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ :

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases} \text{ oraz } y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

1 pkt – zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ :

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

ALBO

wyznaczenie pochodnej funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ :  $y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy układ równań prowadzący do obliczenia współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ .

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $y = -x + 9$  i podstawiamy wyrażenie  $-x + 9$  w miejsce  $y$  do drugiego równania, otrzymując:

$$-x + 9 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{lub} \quad x = 7$$

Dla  $x = -5$  otrzymujemy  $y = 14$ , więc  $B = (-5, 14)$ .

Dla  $x = 7$  otrzymujemy  $y = 2$ , więc  $A = (7, 2)$ .

Oznaczmy pierwszą współrzędną punktu  $C$  przez  $x_C$ . Prosta  $l$  jest równoległa do prostej  $k$ , więc współczynnik kierunkowy obu prostych jest równy  $(-1)$ . Prosta  $l$  jest styczna do paraboli w punkcie  $C$ , więc współczynnik kierunkowy prostej  $l$  jest równy pochodnej funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$  w punkcie  $x = x_C$ . Zatem

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad y'(x_C) = -1$$

$$\frac{1}{2}x_C - \frac{3}{2} = -1$$

$$x_C = 1$$

czyli  $C = (1, -1)$ .

Obliczamy wysokość  $h_C$  trójkąta  $ABC$  poprowadzoną z wierzchołka  $C$  na podstawę  $AB$  (wysokość ta jest równa odległości punktu  $C$  od prostej  $k$ ):

$$h_C = \frac{|1 + (-1) - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

Obliczamy długość boku  $AB$ :  $|AB| = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (14 - 2)^2} = 12\sqrt{2}$ .

Obliczamy pole  $P$  trójkąta  $ABC$ :  $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = 54$ .

**Uwaga.**

Pole  $P$  trójkąta  $ABC$  można również obliczyć ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Wówczas otrzymujemy

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(-5 - 7)(-1 - 2) - (14 - 2)(1 - 7)| = \frac{1}{2} \cdot |36 - (-72)| = 54$$