

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b> <b>TEST DIAGNOSTYCZNY</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00
<i>Termin egzaminu:</i>	12 grudnia 2024 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	13 grudnia 2024 r.

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej <sup>1</sup>	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym [...].	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 6 (mikulombów).

1 pkt – obliczenie  $Q_0 : \frac{2}{81}$

ALBO

– obliczenie  $\beta : \frac{1}{3}$ ,

ALBO

– zapisanie związku  $[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Z warunków  $Q(4) = 2$  oraz  $Q(6) = 18$  otrzymujemy związki  $2 = Q_0 \cdot \beta^{-4}$  oraz

$18 = Q_0 \cdot \beta^{-6}$ . Stąd

$$\frac{2}{18} = \frac{Q_0 \cdot \beta^{-4}}{Q_0 \cdot \beta^{-6}}$$

$$\frac{1}{9} = \beta^2$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

<sup>1</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zatem  $2 = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ , więc  $Q_0 = \frac{2}{81}$ .

Obliczamy  $Q(5)$ :

$$Q(5) = \frac{2}{81} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \frac{2}{81} \cdot 3^5 = 6$$

### Sposób II

Zauważamy, że ciąg wartości funkcji  $Q$  dla kolejnych liczb naturalnych, tj.  $Q(1)$ ,  $Q(2)$ ,  $Q(3)$ , ..., jest geometryczny, ma wszystkie wyrazy dodatnie, pierwszy wyraz równy  $Q_0$  oraz iloraz  $\frac{1}{\beta}$ .

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$[Q(5)]^2 = Q(4) \cdot Q(6)$$

$$[Q(5)]^2 = 2 \cdot 18$$

$$Q(5) = 6$$

W chwili  $t = 5$  s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 6 mikulombów.

### Zadanie 2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

#### Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – uzasadnienie, że  $|CD| = |CE|$

ALBO

– uzasadnienie, że  $|AD| = |BE|$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

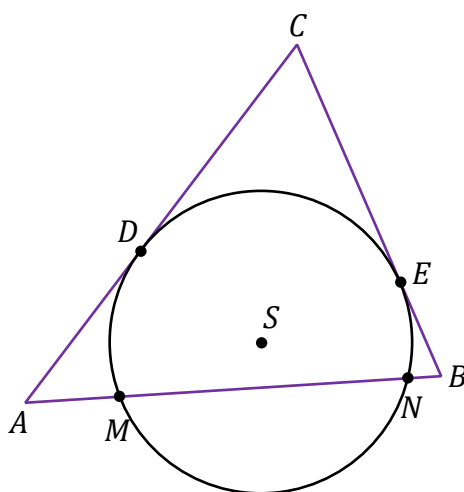
##### Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$D$  – punkt styczności okręgu  $\mathcal{O}$  do boku  $AC$  trójkąta,

$E$  – punkt styczności okręgu  $\mathcal{O}$  do boku  $BC$  trójkąta,

$S$  – środek okręgu  $\mathcal{O}$  (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że  $|CD| = |CE|$ .

Ponieważ  $|MS| = |NS|$ , więc trójkąt  $MNS$  jest równoramienny i  $|\sphericalangle SMN| = |\sphericalangle SNM|$ .

Zatem  $|\sphericalangle SMA| = |\sphericalangle SNB|$ .

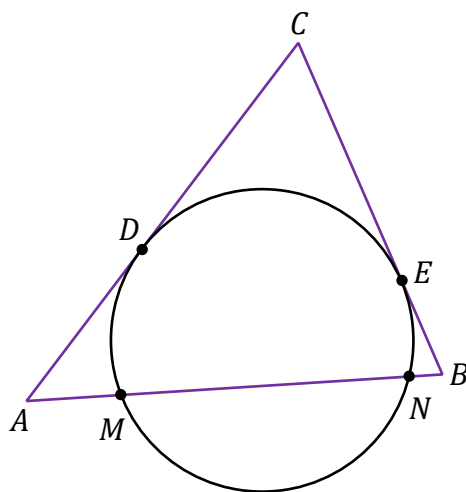
Jeżeli  $|AM| = |NB|$ , to wówczas trójkąty  $AMS$  i  $BNS$  będą przystające (na podstawie cechy bkb przystawiania trójkątów), czyli  $|AS| = |BS|$ . Z równości  $|AS| = |BS|$  oraz  $|DS| = |ES|$ , po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, otrzymamy  $|AD| = |BE|$ . Stąd

$$|AC| = |AD| + |DC| = |CE| + |EB| = |BC|$$

To należało wykazać.

*Sposób II*

Oznaczmy przez  $D$  punkt styczności okręgu  $\mathcal{O}$  do boku  $AC$  trójkąta. Niech  $E$  będzie punktem styczności okręgu  $\mathcal{O}$  do boku  $BC$  trójkąta (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że  $|CD| = |CE|$ .

Jeżeli  $|AM| = |NB|$ , to z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej otrzymujemy

$$|AD|^2 = |AM| \cdot |AN| = |AM| \cdot (|AM| + |MN|) = |AM| \cdot (|BN| + |MN|) = |AM| \cdot |BM|$$

oraz

$$|BE|^2 = |BN| \cdot |BM| = |AM| \cdot |BM|$$

Zatem  $|AD| = |BE|$  i dlatego  $|AC| = |AD| + |DC| = |BE| + |CE| = |BC|$ .

To należało wykazać.

**Zadanie 3. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.5) oblicza objętości i pola powierzchni [...] walca [...].

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $18\pi\sqrt{2}$ .

2 pkt – obliczenie promienia walca i wysokości walca:  $r = \sqrt{6}$  i  $h = 3\sqrt{2}$ .

1 pkt – zapisanie dwóch równań:  $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$  i  $2\pi r^2 + 2\pi r h = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech  $r$  będzie promieniem podstawy walca, natomiast  $h$  – wysokością walca.

Z warunków zadania otrzymujemy  $2r \cdot h = 12\sqrt{3}$  oraz  $2\pi r^2 + 2\pi r h = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$ .

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy  $h = \frac{6\sqrt{3}}{r}$  i podstawiamy w miejsce  $h$  do drugiego z równań, otrzymując

$$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{6\sqrt{3}}{r} = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$$

$$2\pi r^2 + 12\sqrt{3}\pi = 12\pi(\sqrt{3} + 1)$$

$$r^2 = 6$$

Zatem  $r = \sqrt{6}$  oraz  $h = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{2}$ .

Obliczamy objętość  $V$  walca:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\pi\sqrt{2}$$

**Zadanie 4. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

**Zasady oceniania**

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia  $\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1}$  do postaci  $\log_{70} 2 + \log_{70} 7 + \log_{70} 5$ .

1 pkt – przekształcenie wyrażenia  $\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1}$  do postaci  $\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Stosujemy definicję logarytmu oraz wzory na sumę logarytmów oraz na różnicę logarytmów i otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = \\ & = \frac{1}{\log_2 35 + \log_2 2} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + \log_5 5} = \\ & = \frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70} \end{aligned}$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz na logarytm sumy, dostajemy

$$\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_7 70} + \frac{1}{\log_5 70} = \log_{70} 2 + \log_{70} 7 + \log_{70} 5 = \log_{70} 70 = 1$$

Zatem

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

To należało wykazać.

**Zadanie 5. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) [...] stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 0,49.

2 pkt – zastosowanie twierdzenia Bayesa i zapisanie  $P(B_1|A) = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,7 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,65}$ .

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństw:  $P(B_1) = 0,35$  i  $P(A|B_1) = 0,7$  oraz  $P(B_2) = 0,65$ , oraz  $P(A|B_2) = 0,4$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  to zbiór osób w badanej społeczności.

Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

$A$  – losowo wybrana osoba dobrze włada językiem niemieckim,

$B_1$  – losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie,

$B_2$  – losowo wybrana osoba nie ma wyższego wykształcenia.

Zgodnie z warunkami zadania  $B_1 \cup B_2 = \Omega$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  oraz

$$P(B_1) = 0,35$$

$$P(B_2) = 0,65$$

$$P(A) > 0$$

Niech  $B_1|A$  oznacza zdarzenie: losowo wybrana osoba ma wyższe wykształcenie, pod warunkiem, że dobrze włada językiem niemieckim.

Z warunków zadania

$$P(A|B_1) = 0,7$$

$$P(A|B_2) = 0,4$$

Obliczamy  $P(B_1|A)$ , korzystając z twierdzenia Bayesa:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,7 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,65} = \\ &= 0,4851 \approx 0,49 \end{aligned}$$

**Zadanie 6. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania [...] z wartością bezwzględną.

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{2}{5}$  oraz  $\frac{14}{3}$ .

3 pkt – rozwiązanie równania w dwóch spośród rozważanych przedziałów/przypadków (o ile zdający rozpatruje równanie w przedziałach/przypadkach, których suma jest równa  $\mathbb{R}$ /wyczerpujących zbiór  $\mathbb{R}$ )

ALBO

– rozwiązanie równania  $4x - 8 = |x + 2| + 4$  (dla sposobu II),

ALBO

– rozwiązanie równania  $4x - 8 = -|x + 2| - 4$  (dla sposobu II).

2 pkt – zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danego równania odpowiednio w trzech przedziałach:  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, 2)$ ,  $[2, +\infty)$ , lub w czterech przypadkach:  $x + 2 < 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 2 < 0$  i  $x - 2 \geq 0$ ,  $x + 2 \geq 0$  i  $x - 2 < 0$ ,  $x + 2 \geq 0$  i  $x - 2 \geq 0$

ALBO

– zapisanie równania w postaci równoważnej alternatywy dwóch równań:

$4x - 8 = |x + 2| + 4$  lub  $4x - 8 = -|x + 2| - 4$  (dla sposobu II).

1 pkt – przekształcenie danego równania do postaci  $4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$

ALBO

– przekształcenie danego równania do postaci  $|4x - 8| = |x + 2| + 4$ ,

ALBO

– zapisanie przedziałów:  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, 2)$ ,  $[2, +\infty)$ , oraz zapisanie danego równania w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

– zapisanie jednego z przedziałów:  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, 2)$ ,  $[2, +\infty)$ , oraz rozwiązanie danego równania w tym przedziale.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Ponieważ  $|4x - 8| = 4 \cdot |x - 2|$  oraz  $|2 - x| = |x - 2|$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , więc równanie  $|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$  można przekształcić równoważnie do postaci

$$4 \cdot |x - 2| = |x + 2| + 4$$

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy  $x \in (-\infty, -2)$ )

W tym przypadku równanie ma postać  $-4x + 8 = -x - 2 + 4$ , czyli  $x = 2$ .

Ponieważ  $2 \notin (-\infty, -2)$ , więc liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 2. (gdy  $x \in [-2, 2)$ )

W tym przypadku równanie ma postać  $-4x + 8 = x + 2 + 4$ , czyli  $x = \frac{2}{5}$ .

Ponieważ  $\frac{2}{5} \in [-2, 2)$ , więc liczba  $\frac{2}{5}$  jest rozwiązaniem równania.

Przypadek 3. (gdy  $x \in [2, +\infty)$ )

W tym przypadku równanie ma postać  $4x - 8 = x + 2 + 4$ , czyli  $x = \frac{14}{3}$ .

Ponieważ  $\frac{14}{3} \in [2, +\infty)$ , więc liczba  $\frac{14}{3}$  jest rozwiązaniem równania.

Ostatecznie rozwiązaniami danego równania są liczby  $\frac{2}{5}$  oraz  $\frac{14}{3}$ .

### Sposób II

Ponieważ  $|2 - x| = |x - 2|$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , więc równanie

$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$  można przekształcić równoważnie do postaci

$$|4x - 8| = |x + 2| + 4$$

Ponieważ wyrażenie  $|x + 2| + 4$  jest dodatnie dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , więc równanie

$|4x - 8| = |x + 2| + 4$  można zapisać równoważnie jako alternatywę równań:

$$4x - 8 = |x + 2| + 4 \quad \vee \quad 4x - 8 = -|x + 2| - 4$$

Stąd

$$|x + 2| = 4x - 12 \quad \vee \quad |x + 2| = 4 - 4x$$

Rozwiązujemy równanie  $|x + 2| = 4x - 12$ :

$$4x - 12 \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4x - 12 \quad \vee \quad x + 2 = -4x + 12)$$

$$x \geq 3 \quad \wedge \quad \left( x = \frac{14}{3} \quad \vee \quad x = 2 \right)$$

Ponieważ  $\frac{14}{3} \in [3, +\infty)$  i  $2 \notin [3, +\infty)$ , więc rozwiązaniem równania

$|x + 2| = 4x - 12$  jest liczba  $\frac{14}{3}$ .

Rozwiązujemy równanie  $|x + 2| = 4 - 4x$ :

$$4 - 4x \geq 0 \quad \wedge \quad (x + 2 = 4 - 4x \quad \vee \quad x + 2 = -4 + 4x)$$

$$x \leq 1 \quad \wedge \quad \left( x = \frac{2}{5} \quad \vee \quad x = 2 \right)$$

Ponieważ  $\frac{2}{5} \in (-\infty, 1]$  i  $2 \notin (-\infty, 1]$ , więc rozwiązaniem równania

$|x + 2| = 4 - 4x$  jest liczba  $\frac{2}{5}$ .

Rozwiązaniami równania  $|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$  są liczby  $\frac{2}{5}$  oraz  $\frac{14}{3}$ .

**Zadanie 7. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu; IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej [...].

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$  lub  $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$ .

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu  $C$ ), np.  $(x + 1)^2 + (3x + 6 - 3)^2 = 50$ .

2 pkt – wyznaczenie równania symetralnej odcinka  $AB$ :  $y = 3x + 6$ .

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $(-\frac{1}{3})$

ALBO

– zapisanie równości  $\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x + 6)^2 + (y - 8)^2}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Z warunku  $|AC| = |BC|$  wynika, że punkt  $C$  leży na symetralnej odcinka  $AB$ .

Współczynnik kierunkowy  $a_{AB}$  prostej  $AB$  jest równy  $a_{AB} = \frac{8-4}{-6-6} = -\frac{1}{3}$ , więc

współczynnik kierunkowy prostej, która jest symetralną odcinka  $AB$ , jest równy  $a = 3$ .

Obliczamy współrzędne środka  $M$  odcinka  $AB$ :

$$M = \left( \frac{6 + (-6)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right) = (0, 6)$$

Ponieważ ta symetralna przechodzi przez punkt  $M$ , więc ma ona równanie

$y = 3(x - 0) + 6$ , czyli  $y = 3x + 6$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $C$ , który jest punktem przecięcia symetralnej odcinka  $AB$  z danym okręgiem:

$$(x + 1)^2 + (3x + 6 - 3)^2 = 50$$

$$(x + 1)^2 + 9(x + 1)^2 = 50$$

$$(x + 1)^2 = 5$$

$$|x + 1| = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5} - 1 \quad \vee \quad x = -\sqrt{5} - 1$$

Gdy  $x = \sqrt{5} - 1$ , to  $y = 3(\sqrt{5} - 1) + 6 = 3\sqrt{5} + 3$ , więc wtedy  $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$ .

Gdy  $x = -\sqrt{5} - 1$ , to  $y = 3(-\sqrt{5} - 1) + 6 = -3\sqrt{5} + 3$ , więc wtedy  $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$ .

Odp.  $C = (\sqrt{5} - 1, 3\sqrt{5} + 3)$  lub  $C = (-\sqrt{5} - 1, -3\sqrt{5} + 3)$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.R1) oblicza granice ciągów [...].

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

3 pkt – wyznaczenie sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ :  $(n + 1)^2$  **oraz** zapisanie symbolu Newtona  $\binom{n}{2}$  w postaci  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

2 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ :  $(n + 1)$  **oraz** zapisanie symbolu Newtona  $\binom{n}{2}$  w postaci  $\frac{n(n-1)}{2}$   
ALBO

– wyznaczenie sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ :  $(n + 1)^2$ .

1 pkt – wyznaczenie liczby składników sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ :  $(n + 1)$   
ALBO

– zapisanie symbolu Newtona  $\binom{n}{2}$  w postaci  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający przyjmie, że liczba składników sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$  jest równa  $n$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Kolejne składniki sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie  $a_1 = 1$  oraz różnicy  $r = 2$ .

Niech  $k$  oznacza liczbę składników tej sumy. Wyznaczamy  $k$ :

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r$$

$$2n + 1 = 1 + (k - 1) \cdot 2$$

$$k = n + 1$$

Zatem suma składa się z  $(n + 1)$  składników.

Stosując wzór na sumę  $(n + 1)$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = \frac{[1 + (2n + 1)]}{2} \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$$

Wyznaczamy współczynnik dwumianowy:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Obliczamy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{\binom{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 2 \end{aligned}$$

**Zadanie 9. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

**Zasady oceniania (dla sposobu I)**

4 pkt – zapisanie, że równanie  $\sin(2x) = -2$  nie ma rozwiązań oraz rozwiązanie równania

$$\sin(2x) = 1 \text{ w zbiorze } [-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi \text{ oraz } \frac{5}{4}\pi.$$

3 pkt – rozwiązanie równania  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze liczb rzeczywistych:  $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$ ,  
gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań  $\sin(2x) = -2$  lub  $\sin(2x) = 1$ .

1 pkt – przekształcenie równania do postaci

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

ALBO

– zastosowanie tożsamości  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ ,

ALBO

– zastosowanie tożsamości  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania (dla sposobu II)**

4 pkt – spełnienie kryterium za 3 punkty oraz sprawdzenie rachunkiem, że liczby  $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ ,  
 $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$  spełniają równanie  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ .

3 pkt – rozwiązanie równania  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze liczb rzeczywistych:  $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$ ,  
gdzie  $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]: \left(-\frac{3}{4}\pi\right), \frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

2 pkt – wykorzystanie równości  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$  i przekształcenie

$$\text{nierówności } \sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} \text{ do postaci } \sin(2x) \geq 1.$$

1 pkt – zastosowanie nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i zapisanie

$$\text{nierówności } \sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania (dla sposobu III)**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(-\frac{3}{4}\pi)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

3 pkt – równoważne przekształcenie równania do alternatywy równań  $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$  lub  $\sin x - \cos x = 0$  i rozwiązanie równań tej alternatywy w zbiorze liczb

rzeczywistych:  $x = \frac{1}{4}\pi + \pi \cdot k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

2 pkt – przekształcenie równania do postaci  $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$ .

1 pkt – przekształcenie równania do postaci

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga.**

Jeżeli zdający przekształci równanie do postaci  $(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$ ,

a następnie rozwiąże poprawnie równania  $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$  oraz  $\sin x - \cos x = 0$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$ , to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na kwadrat sumy oraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = \sin x \cdot \cos x$$

Korzystamy ze wzoru na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy dalej

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\sin^2(2x) + \sin(2x) - 2 = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \quad \vee \quad \sin(2x) = -2$$

Rozwiązujemy równanie  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze  $\mathbb{R}$ :

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniami równania  $\sin(2x) = 1$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$  są liczby:  $(-\frac{3}{4}\pi)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

Równanie  $\sin(2x) = -2$  nie ma rozwiązań w zbiorze  $\mathbb{R}$ .

Zatem rozwiązaniami równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$  są liczby:  $(-\frac{3}{4}\pi)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

### Sposób II

Korzystamy z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną i otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2}} \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}$$

Stąd, po zastosowaniu tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i wzoru na sinus podwojonego kąta oraz związku  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ , dostajemy kolejno:

$$\sqrt{\frac{\sin x \cdot \cos x}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) \geq 1$$

Stąd i z własności funkcji sinus wynika, że  $\sin(2x) = 1$ .

Zatem

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{Z}$$

Gdy  $x = -\frac{3}{4}\pi$ , to wtedy

$$\sin^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) - \cos^4\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba  $(-\frac{3}{4}\pi)$  jest rozwiązaniem równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ .

Gdy  $x = \frac{1}{4}\pi$ , to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba  $\frac{1}{4}\pi$  jest rozwiązaniem równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ .

Gdy  $x = \frac{5}{4}\pi$ , to wtedy

$$\sin^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \cos^4\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

więc liczba  $\frac{5}{4}\pi$  jest rozwiązaniem równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$ .

Zatem rozwiązaniami równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

### Sposób III

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^4 x - \sin^3 x \cdot \cos x + \cos^4 x - \cos^3 x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin^3 x (\sin x - \cos x) + \cos^3 x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$(\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin^3 x = \cos^3 x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x \quad \vee \quad \sin x = \cos x$$

$$\sin x = \cos x$$

Gdyby  $\cos x = 0$ , to wtedy  $\sin x = \cos x = 0$ , więc wstawiając te wartości do tożsamości trygonometrycznej  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , otrzymalibyśmy  $0 + 0 = 1$ . To oznacza, że  $\cos x \neq 0$ , więc możemy obie strony równania  $\sin x = \cos x$  podzielić obustronnie przez  $\cos x$  i otrzymujemy  $\operatorname{tg} x = 1$ . To równanie w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$  ma trzy rozwiązania:

$\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

Zatem rozwiązaniami równania  $\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$  w zbiorze  $[-\pi, 2\pi]$  są liczby:  $\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$ ,  $\frac{1}{4}\pi$  oraz  $\frac{5}{4}\pi$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].

#### Zasady oceniania

5 pkt – odrzucenie ciągu odpowiadającego  $r = \frac{11}{3}$  i obliczenie wyrazów ciągu

geometrycznego:  $(32, 4, \frac{1}{2})$ .

4 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą  $r$ :  $r = -3$  oraz  $r = \frac{11}{3}$

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą  $a_1$ :  $a_1 = 14$  oraz  $a_1 = -6$ .

3 pkt – zapisane równania z jedną niewiadomą ( $a_1$  lub  $r$ ), np.

$$4^2 = -\frac{1}{8}(5 + 3r) \cdot (10 - 6r + 4), \quad 4^2 = -\frac{1}{8}(10 - a_1) \cdot (4 + 2a_1).$$

2 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10 \quad \text{i} \quad (a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$$

ALBO

– zapisanie związku  $4^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$ .

1 pkt – zastosowanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie związku

$$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisanie równania z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.  $a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$ ,

ALBO

– obliczenie  $a_4$ :  $a_4 = 5$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga:

Jeżeli zdający obliczy wyrazy ciągów geometrycznych odpowiadające wartościom  $r = -3$  oraz  $r = \frac{11}{3}$  i w odpowiedzi końcowej nie odrzuci ciągu  $(-8, 4, -2)$ , to otrzymuje **4 punkty** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech  $r$  oznacza różnicę ciągu  $(a_n)$ . Z warunków zadania oraz ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_3 + a_5 = 10$$

$$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 10$$

$$a_1 = 5 - 3r$$

Z warunków zadania i z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$(a_4 - 1)^2 = -\frac{1}{8}a_7 \cdot (2a_1 + 4)$$

$$(a_1 + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(a_1 + 6r)(2a_1 + 4)$$

Stąd i ze związku  $a_1 = 5 - 3r$  dostajemy kolejno

$$(5 - 3r + 3r - 1)^2 = -\frac{1}{8}(5 - 3r + 6r)(10 - 6r + 4)$$

$$16 = -\frac{1}{8}(3r + 5)(14 - 6r)$$

$$18r^2 - 12r - 198 = 0$$

$$r = -3 \quad \vee \quad r = \frac{11}{3}$$

Dla  $r = \frac{11}{3}$  ciąg  $(a_n)$  jest rosnący, więc warunki zadania nie są spełnione.

Dla  $r = -3$  ciąg  $(a_n)$  jest malejący,  $a_1 = 14$  oraz  $a_3 + a_5 = 8 + 2 = 10$ . Wtedy również  $(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7) = (32, 4, \frac{1}{2})$ . Ciąg  $(32, 4, \frac{1}{2})$  jest geometryczny, więc jest jedynym rozwiązaniem zadania.

### Zadanie 11. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania [...] kwadratowe z parametrami [...].

#### Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  równoważnej warunkowi

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16: m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right].$$

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$  równoważnej warunkowi

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 12, \text{ np. } 3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16.$$

1 pkt – przekształcenie nierówności  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète'a, np.

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 12.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają

jednocześnie dwa warunki:  $\Delta > 0$  i  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ :  $m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]$ .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , które spełniają jednocześnie warunki  $\Delta > 0$  i  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ :

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right].$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że  $x_1 + x_2 = \pm(\pm m^2 + m + 3)$  lub  $x_1 \cdot x_2 = \pm 3$ , lub  $x_1 + x_2 = \pm \frac{b}{2a}$ , to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$  do postaci pozwalającej na bezpośrednie jednokrotne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np.:
  - pominię istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$  do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a
  - przyjmie, że  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$
 i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za II etap (1 punkt za zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.
5. Jeżeli w II etapie rozwiązania zdający popełni błędy i otrzyma nierówność  $V(m) \leq 0$ , to za podanie zbioru rozwiązań nierówności otrzymuje **1 punkt** tylko wtedy, gdy wielomian  $V$  jest stopnia co najmniej drugiego i ma co najmniej dwa różne pierwiastki rzeczywiste.
6. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np.  $x_1 + x_2 > 0$ ,  $x_1 \cdot x_2 > 0$ ), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 2 punkty za II etap).

**Przykładowe pełne rozwiązanie****I etap**

Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $x^2 - 3x - m^2 + m + 3$  jest dodatni.

Rozwiązujemy warunek  $\Delta > 0$ :

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + m + 3) > 0$$

$$4m^2 - 4m - 3 > 0$$

$$(2m - 1)^2 - 4 > 0$$

$$(2m - 1 - 2) \cdot (2m - 1 + 2) > 0$$

$$4 \left( m - \frac{3}{2} \right) \left( m + \frac{1}{2} \right) > 0$$

$$m \in \left( -\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{3}{2}, +\infty \right)$$

## II etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$ , korzystając ze wzorów Viète'a.

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \cdot 3 \leq 12$$

$$|x_1 - x_2| \leq 4$$

Ponieważ obie strony nierówności  $|x_1 - x_2| \leq 4$  są nieujemne, więc przekształcamy tę nierówność równoważnie do postaci  $(x_1 - x_2)^2 \leq 16$ . Stąd otrzymujemy

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 16$$

$$3^2 - 4 \cdot (-m^2 + m + 3) \leq 16$$

$$4m^2 - 4m - 19 \leq 0$$

Obliczamy wyróżnik  $\Delta_m$  trójmianu kwadratowego  $4m^2 - 4m - 19$  i rozwiązujemy nierówność  $4m^2 - 4m - 19 \leq 0$ :

$$\Delta_m = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-19) = 20 \cdot 16$$

$$m = \frac{4 - 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - 2\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad m = \frac{4 + 8\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$m \in \left[ \frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2} \right]$$

## III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad \text{oraz} \quad m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right]:$$

$$m \in \left[\frac{1 - 2\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{5}}{2}\right].$$

**Zadanie 12. (0–5)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens [...]. VII.R5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów.

**Zasady oceniania (dla sposobu I)**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$  i  $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$  oraz uzasadnienie, że  $|CF| = |AC|$ .

3 pkt – zapisanie równości  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$  oraz uzasadnienie, że  $|CF| = |AC|$ .

2 pkt – uzasadnienie, że  $|CF| = |AC|$

ALBO

– zdefiniowanie punktu  $F$  jako obrazu punktu  $C$  w symetrii osiowej względem prostej  $k$  **oraz** zapisanie równości  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ .

1 pkt – zdefiniowanie punktu  $F$  jako obrazu punktu  $C$  w symetrii osiowej względem prostej  $k$

ALBO

– zapisanie równości  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Zasady oceniania (dla sposobu II)**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związku  $\frac{2\sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$  i zastosowanie wzoru na sinus sumy kątów do  $\sin(3\alpha)$  oraz  $\sin(2\alpha + \beta)$ , np.:

$$2 \sin \alpha [\sin(2\alpha) \cos \beta + \cos(2\alpha) \sin \beta] = \sin \beta [\sin(2\alpha) \cos \alpha + \cos(2\alpha) \sin \alpha].$$

3 pkt – wyeliminowanie długości odcinków z układu  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$

$$\text{i } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}, \text{ np. zapisanie związku } \frac{2\sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}.$$

2 pkt – zapisanie związków  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$  i  $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$ .

1 pkt – zapisanie związku  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$

ALBO

– zapisanie związku  $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Zasady oceniania (dla sposobu III)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie równań:  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$  oraz  $a^2 - b^2 = 4cx$  oraz  $a^2 = 2b(c + x)$ .

3 pkt – spełnienie wszystkich trzech warunków określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie równań  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$  oraz  $a^2 - b^2 = 4cx$ ,

ALBO

– zapisanie równań  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$  oraz  $a^2 = 2b(c + x)$ ,

ALBO

– zapisanie równań  $a^2 - b^2 = 4cx$  oraz  $a^2 = 2b(c + x)$ .

2 pkt – spełnienie dwóch warunków spośród 1)–3) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt

ALBO

– zapisanie związku  $a^2 = 2b(c + x)$ ,

ALBO

– zapisanie związku  $a^2 - b^2 = 4cx$ .

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych trzech warunków:

1) zapisanie równości  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x}$

2) zapisanie związku  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$

3) zapisanie równań  $a^2 = h^2 + (c + x)^2$  oraz  $b^2 = h^2 + (c - x)^2$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Zasady oceniania (dla sposobu IV)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 2.

4 pkt – zapisanie związków:

$$(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha) \text{ i } \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha}, \text{ i } \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)} \text{ oraz}$$

$$\text{zapisanie tożsamości } \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$\text{(lub } \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \sin \alpha).$$

3 pkt – zapisanie związków  $(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha)$  i  $\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha}$  oraz

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}.$$

2 pkt – zapisanie związku  $(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \beta = 4bc \cdot \sin(2\alpha)$ .

1 pkt – zapisanie związku  $4cd \cdot \cos \beta = a^2 - b^2$

ALBO

– zapisanie związku  $d \cdot \sin \beta = b \cdot \sin(2\alpha)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

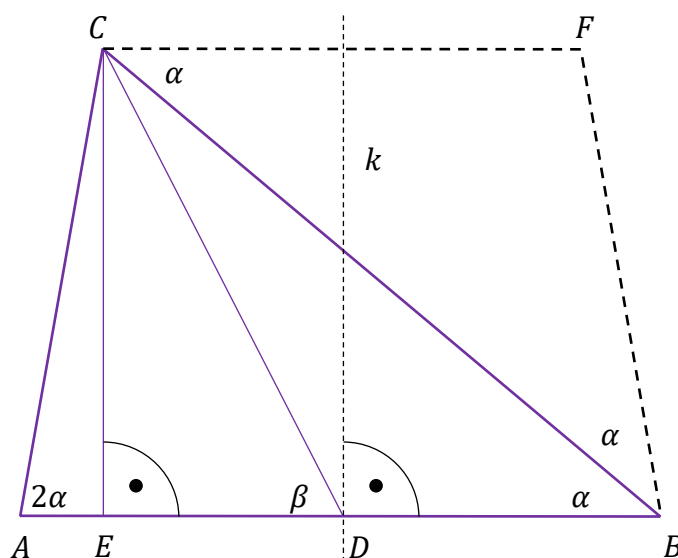
$k$  – prosta prostopadła do  $AB$  i przechodząca przez punkt  $D$ ,

$F$  – obraz punktu  $C$  w symetrii osiowej względem prostej  $k$ ,

$E$  – spodek wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka  $C$  na podstawę  $AB$ .

Czworokąt  $ABFC$  jest trapezem równoramiennym o podstawach  $AB$  i  $CF$  oraz ramionach  $AC$  i  $BF$ . Zatem  $|\sphericalangle CBF| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle CBA| = 2\alpha - \alpha = \alpha$  oraz

$|\sphericalangle BCF| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$ , więc trójkąt  $BCF$  jest równoramienny (zobacz rysunek). Stąd  $|CF| = |FB| = |AC|$ .



Ponieważ  $\operatorname{tg} \beta = \frac{|CE|}{|ED|}$  oraz  $\sin(2\alpha) = \frac{|CE|}{|AC|}$ , więc

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{|CE|}{|ED|}}{\frac{|CE|}{|AC|}} = \frac{|AC|}{|ED|}$$

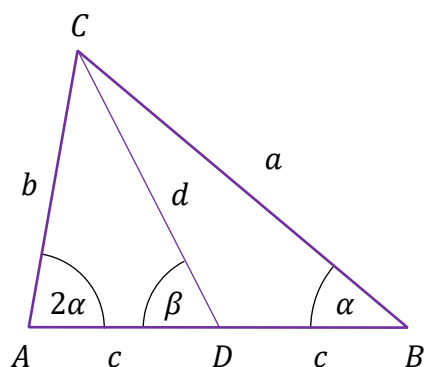
Ponieważ trapez  $ABFC$  jest równoramienny i  $D$  jest środkiem podstawy  $AB$  tego trapezu, więc  $|ED| = \frac{1}{2} \cdot |CF|$ .

Zatem

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |CF|} = \frac{|AC|}{\frac{1}{2} \cdot |AC|} = 2$$

### Sposób II

Przyjmijmy następujące oznaczenia:  $|AD| = |BD| = c$ ,  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CD| = d$  (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów  $ABC$  i  $ADC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin[180^\circ - (2\alpha + \beta)]}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2c}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(3\alpha)} \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$\frac{2 \sin \alpha}{\sin(3\alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha + \beta) = \sin \beta \cdot \sin(3\alpha)$$

Stosujemy wzór na sinus sumy kątów, otrzymując kolejno:

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos(2\alpha) \sin \beta = \sin \beta \sin(2\alpha) \cos \alpha + \sin \beta \cos(2\alpha) \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta \sin(2\alpha) \cos \alpha - \sin \beta \cos(2\alpha) \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta [\sin(2\alpha) \cos \alpha - \cos(2\alpha) \sin \alpha]$$

Stosujemy wzór na sinus różnicy kątów i dostajemy

$$2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta \sin \alpha$$

Stąd

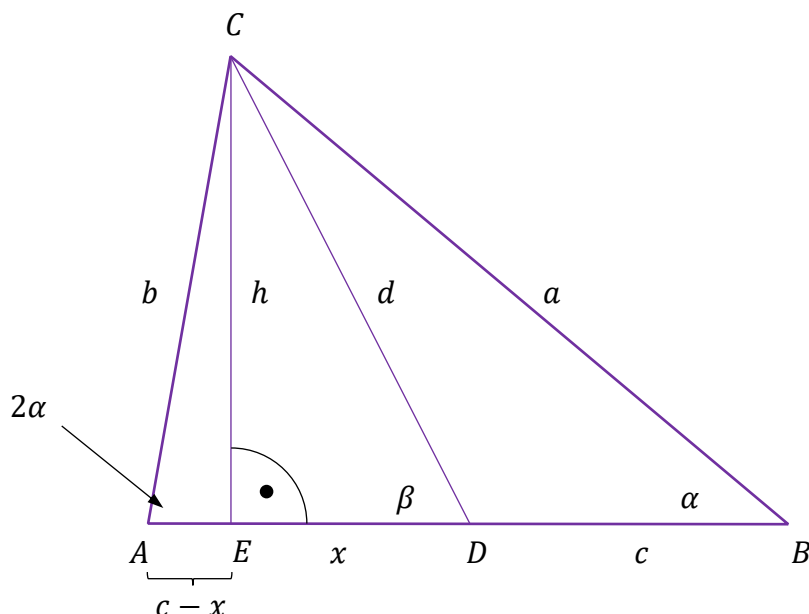
$$\sin \alpha = 0 \quad \vee \quad 2 \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta$$

Trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny, więc  $\sin \alpha = 0$  jest wykluczone przez warunki zadania. Zatem  $2 \sin(2\alpha) \cos \beta = \sin \beta$ , czyli

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = 2$$

## Sposób III

Przyjmijmy następujące oznaczenia:  $|AD| = |BD| = c$ ,  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CD| = d$ ,  
 $E$  – spodek wysokości trójkąta  $ADC$  poprowadzonej z wierzchołka  $C$  na bok  $AD$ ,  
 $h$  – wysokość trójkąta  $ADC$  poprowadzona z wierzchołka  $C$ ,  
 $x$  – długość odcinka  $DE$  (zobacz rysunek).



Przy przyjętych oznaczeniach mamy

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{h}{x}}{\frac{h}{b}} = \frac{b}{x}$$

Po zastosowaniu do trójkąta  $ABC$  twierdzenia sinusów oraz wzoru na sinus podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \alpha} &= \frac{a}{\sin(2\alpha)} \\ \frac{b}{\sin \alpha} &= \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{2b} \end{aligned}$$

Z definicji cosinusa zastosowanej do trójkąta prostokątnego  $EBC$  mamy  $\cos \alpha = \frac{c+x}{a}$ ,  
 więc po uwzględnieniu związku  $\cos \alpha = \frac{a}{2b}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b} &= \frac{c+x}{a} \\ a^2 &= 2b(c+x) \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkątów  $AEC$  i  $EBC$  otrzymujemy

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2 \quad \wedge \quad a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

Stąd

$$a^2 - b^2 = h^2 + (c + x)^2 - h^2 - (c - x)^2$$

czyli

$$a^2 - b^2 = 4cx$$

Stąd i z zależności  $a^2 = 2b(c + x)$  otrzymujemy kolejno

$$a^2 = 2b(c + x) \quad \wedge \quad a^2 - b^2 = 4cx$$

$$2b(c + x) - b^2 = 4cx$$

$$2bc + 2bx - b^2 = 4cx$$

$$2bc - b^2 = 4cx - 2bx$$

$$b(2c - b) = 2x(2c - b)$$

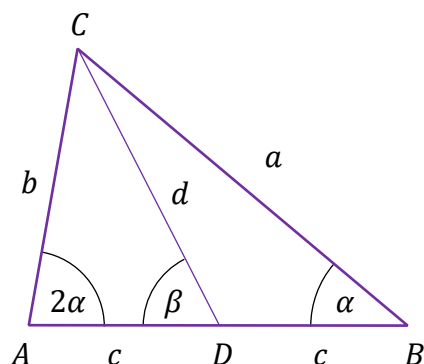
$$b = 2x \quad \vee \quad b = 2c$$

Gdy  $b = 2c$ , to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA|$ , czyli  $\alpha = 180 - 3\alpha$ , tj.  $\alpha = 45^\circ$ . Wtedy  $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha = 90^\circ$  i trójkąt  $ABC$  nie jest ostrokątny. Zatem  $b = 2x$  i ostatecznie

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

#### Sposób IV

Przyjmijmy następujące oznaczenia:  $|AD| = |BD| = c$ ,  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CD| = d$  (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkątów  $BCD$  i  $ADC$  twierdzenie cosinusów i otrzymujemy:

$$a^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

$$b^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \beta$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych, dostajemy

$$a^2 - b^2 = 4cd \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 - b^2}{4cd}$$

Stosujemy do trójkąta  $ADC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin(2\alpha)}$$

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{d}}{\frac{a^2 - b^2}{4cd}} = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$$

Stosujemy do trójkąta  $ABC$  twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{2c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{b}{\sin \alpha} \quad \wedge \quad \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(2\alpha)}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów redukcyjnych oraz wzoru na sinus podwojonego kąta, otrzymujemy

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \quad \wedge \quad \sin(2\alpha) = a \cdot \frac{\sin \alpha}{b}$$

$$\sin(3\alpha) = 2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \quad \wedge \quad \cos \alpha = \frac{a}{2b}$$

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów oraz cosinus podwojonego kąta uzyskujemy kolejno:

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(2\alpha) \cdot \sin \alpha$$

$$2c \cdot \frac{\sin \alpha}{b} = a \cdot \frac{\sin \alpha}{b} \cdot \frac{a}{2b} + \left[ 2 \cdot \left( \frac{a}{2b} \right)^2 - 1 \right] \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{2c}{b} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^2} - 1$$

$$2bc = a^2 - b^2$$

Stąd i z zależności  $\operatorname{tg} \beta = \frac{4bc \cdot \sin(2\alpha)}{a^2 - b^2}$  otrzymujemy

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)} = \frac{4bc}{a^2 - b^2} = \frac{4bc}{2bc} = 2$$

**Zadanie 13.1. (0–2)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

**Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $B$  i  $D$  oraz zapisanie drugiej współrzędnej punktu  $C$  w zależności od  $x$ :  $B = (7, 0)$  i  $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$  oraz  $C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy współrzędne punktu  $B$ :

$$\frac{12x - 84}{x - 8} = 0$$

$$12x - 84 = 0$$

$$x = 7 \in (-\infty, 8)$$

Zatem  $B = (7, 0)$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $D$ :  $f(0) = \frac{12 \cdot 0 - 84}{0 - 8} = \frac{21}{2}$

Zatem  $D = \left(0, \frac{21}{2}\right)$ .

Ponieważ  $C$  leży na wykresie funkcji  $f$  i ma obie współrzędne dodatnie, więc

$C = \left(x, \frac{12x-84}{x-8}\right)$ , gdzie  $0 < x < 7$ .

Pole  $P$  czworokąta  $OB CD$  jest sumą pól trójkątów  $OCD$  i  $OBC$ , więc

$$P = P_{OCD} + P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{12x - 84}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 8x - 56}{x - 8} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

gdzie  $x \in (0, 7)$ .

**Zadanie 13.2. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

**Zasady oceniania**

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $P$  przyjmuje wartość największą dla  $x = 8 - 2\sqrt{2}$  i obliczenie współrzędnych punktu  $C$ , dla których pole czworokąta  $OBCD$  jest największe:  $C = (8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2})$ .
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $P$  przyjmuje wartość największą dla  $x = 8 - 2\sqrt{2}$ .
- 2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $P$ :  $x = 8 - 2\sqrt{2}$ .
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $P$ , np.  $P'(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{2x(x-8) - (x^2-56) \cdot 1}{(x-8)^2}$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

- Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości  $x$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
  - opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $P$  LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $P$  ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość LUB
  - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $P$  ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
 Jeżeli zdający nie przedstawi poprawnego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji  $P$ :

$$P'(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{2x(x-8) - (x^2-56) \cdot 1}{(x-8)^2} = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2}$$

dla  $x \in (0, 7)$ .

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji  $P$ :

$$P'(x) = 0$$

$$\frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2} = 0$$

$$x^2 - 16x + 56 = 0$$

$$x = \frac{16 - \sqrt{32}}{2} = 8 - 2\sqrt{2} \in (0, 7) \quad \vee \quad x = \frac{16 + \sqrt{32}}{2} \notin (0, 7)$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x) > 0$$

$$\frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 16x + 56}{(x-8)^2} > 0$$

$$x^2 - 16x + 56 > 0$$

$$x \in (0, 8 - 2\sqrt{2})$$

Zatem funkcja  $P$  jest rosnąca w przedziale  $(0, 8 - 2\sqrt{2}]$  i funkcja  $P$  jest malejąca w przedziale  $[8 - 2\sqrt{2}, 7)$ .

Stąd dla  $x = 8 - 2\sqrt{2}$  funkcja  $P$  osiąga wartość największą.

Gdy pierwsza współrzędna punktu  $C$  jest równa  $x_C = 8 - 2\sqrt{2}$ , to wtedy druga współrzędna  $y_C$  tego punktu jest równa:

$$y_C = \frac{12 \cdot (8 - 2\sqrt{2}) - 84}{8 - 2\sqrt{2} - 8} = \frac{12 - 24\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{12}{-2\sqrt{2}} + 12 = 12 - 3\sqrt{2}$$

Pole czworokąta  $OBCE$  jest największe, gdy  $C = (8 - 2\sqrt{2}, 12 - 3\sqrt{2})$ .